ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

TOME SOIXANTE-SIXIÈME 1952

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

TROISIÈME ET DERNIER FASCICULE

31 DÉCEMBRE 1952

Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique et du Gouvernement

LOUVAIN

Secrétariat de la Société Scientifique

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

Chèques postaux 2027.46

1952

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé: 60 frs

TABLE DE MATIÈRES

Session du 30 octobre 1952, à Louvain.

PREMIÈRE SECTION : **Séances mathématiques et astronomiques**

PAGES

Sur des plans associés à un tétraèdre, par M. V. Thébault 111

Sur les rangs-lignes à droite de deux matrices inverses, par M. R. Ballieu .. 119

Application de la méthode des fonctions majorantes à l'étude de certaines équations intégro-différentielles récurrentes, par R. H. Germay 125

On Meijer Transform. II, by J. R. Jaiswal 131

DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques et chimiques**

Sur certains systèmes pancratiques non symétriques à trois lentilles, par A. Biot 152

Construction d'un spectrographe de masse du type Mattauch à grand pouvoir de résolution, par MM. J. M. Delfosse et M. Nève de Mévergnies 156

Note sur le tracé des courbes *f* et des courbes CT en élasticité, par M. A. Pirard 162

Spectre infra-rouge à grande dispersion de CD3Br (2900 à 3400 cm–1), par M. Ch. Courtoy 173

Fonction potentielle de l'éthylène, par MM. J. Charette et Ch. Manneback 178

Table des Matières du tome 66e 195

Le prix d'ABONNEMENT aux ANNALES, série I, pour des personnes ne faisant pas partie de la Société scientifique, est fixé comme suit :

en Belgique, au Congo-Belge et au Luxembourg 70 fr.
dans les autres pays 120 fr.

SESSION DU 30 OCTOBRE 1952
A LOUVAIN

Première Section

Sciences Mathématiques et Astronomiques

Sur des plans associés à un tétraèdre

PAR

Victor THEBAULT
Tennie (France)

Une transversale Δ rencontre les côtés BC, CA, AB d'un triangle respectivement en α, β, γ. On sait que les isotomiques α', β', γ' (autrement dit les symétriques de α, β, γ par rapport aux milieux des côtés du triangle) sont aussi sur une droite Δ' (transversale réciproque de Δ). Nous avons étendu comme suit cette propriété à un plan associé à un tétraèdre [1] : *un plan* π *coupe les arêtes d'un tétraèdre* ABCD *respectivement en des points* α, β, γ, λ, μ, υ. *Les isotomiques* α', β', γ', λ', μ', υ' *de ces points, par rapport aux milieux des arêtes qui les contiennent, sont situés dans un même plan* π' (transversal réciproque de π).

Cette note qui a pour objet de signaler d'autres analogies entre les propriétés des transversales réciproques et de ces plans, peut constituer un chapitre de la géométrie du tétraèdre.

1. THÉORÈME. — *Soient un tétraèdre* $T \equiv ABCD$, *un point arbitraire* M *de l'espace et un plan* (P) *qui coupe les arêtes* DA, DB, DC *respectivement en* α, β, γ. *Les plans* (BC, M), (CA, M) (AB, M) *rencontrent* DA, DB, BC *en* A', B', C' *et si l'on pose*

$$\frac{\overline{A\alpha}}{\overline{\alpha D}} = x, \frac{\overline{B\beta}}{\overline{\beta D}} = y, \frac{\overline{C\gamma}}{\overline{\gamma D}} = z, \frac{\overline{DA'}}{\overline{A'A}} = m, \frac{\overline{DB'}}{\overline{B'B}} = n, \frac{\overline{DC'}}{\overline{C'C}} = p,$$

la condition nécessaire et suffisante pour que le plan (P) *passe par* M *est que l'on ait*

$$mx + ny + pz = 1. \tag{1}$$

[1] V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1925-459.

En effet, plaçons en D, A, B, C des poids proportionnels à 1, m, n, p; leur centre de gravité sera le point M. Dès lors, si on désigne par d_1, d_2, d_3, d_4 les distances dirigées de D, A, B, C au plan (P) et si l'on écrit que la somme algébrique des moments des poids par rapport à un plan (P) passant par le centre de gravité M est nulle, on a

$$d_1 + d_2 m + d_3 n + d_4 p = 0$$

Si l'on remarque, de plus, que les rapports $d_2 : d_1$, $d_3 : d_1$, $d_4 : d_1$ valent $-x$, $-y$. $-z$, on obtient la relation (1). Inversement, si la relation (1) existe, la somme algébrique des moments des poids 1, m, n, p par rapport à (P) est nulle, et il en résulte que ce plan passe par le centre de gravité du système de poids considérés.

Corollaire. — *La condition nécessaire et suffisante pour que quatre plans* (P), (P_1), (P_2), (P_3), *qui rencontrent les arêtes* DA, DB, DC *d'un tétraèdre* T *en* (α, β, γ), (α_1, β_1 γ_1), (α_2, β_2, γ_2), (α_3, β_3, γ_3), *soient concourants est que les plans passant par les arêtes* BC, CA, AB *et par les isotomiques de ces points sur les arêtes* DA, DB, DC *concourent respectivement en des points* M, M_1, M_2, M_3 *situés dans un même plan.*

Soient (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), les rapports qui caractérisent les points (α, β, γ), (α_1, β_1, γ_1), (α_2, β_2, γ_2), (α_3, β_3, γ_3) et Q le point de concours de (P), (P_1), (P_2), (P_3); M, M_1, M_2, M_3 les points obtenus comme il est dit dans l'énoncé. Désignons par (λ,μ,ν), (λ_1, μ_1, ν_1), (λ_2, μ_2, ν_2), (λ_3, μ_3, ν_3) les rapports analogues à m, n, p pour les points M, M_1, M_2, M_3. On constate que $x = \lambda$, $y = \mu$, $z = \nu$, $x_1 = \lambda_1$, $y_1 = \mu_1$, $z_1 = \nu_1$, $x_2 = \lambda_2$, $y_2 = \mu_2$, $z_2 = \nu_2$, $x_3 = \lambda_3$, $y_3 = \mu_3$, $z_3 = \nu_3$.

Les relations

$$mx + ny + pz = 1, \quad mx_1 + ny_1 + pz_1 = 1, \quad mx_2 + ny_2 + pz_2 = 1, \quad mx_3 + ny_3 + pz_3 = 1,$$

qui expriment que (P), (P_1), (P_2), (P_3) passent par Q, entraînent les suivantes

$$\lambda m + \mu n + \nu p = 1, \ \lambda_1 m + \mu_1 n + \nu_1 p = 1, \ \lambda_2 m + \mu_2 n + \nu_2 p = 1, \ \lambda_3 m + \mu_3 n + \nu_3 p = 1,$$

et réciproquement. Or, les dernières relations expriment que les points M, M_1, M_2, M_3 appartiennent au plan qui détermine sur DA, DB, DC des rapports m, n, p, c'est-à-dire au plan transversal réciproque du plan A'B'C' qui passe par les points de rencontre des plans (BC, Q), (CA, Q), (AB, Q) avec DA, DB, DC. Les points M, M_1, M_2, M_3 sont donc co-

planaires, et inversement si les points M, M_1, M_2, M_3 sont dans un même plan, les plans (P), (P_1), (P_2), (P_3) concourent en un point Q.

2. THÉORÈME. — *Si deux tétraèdres* T *et* T′ *sont homothétiques par rapport à un point* P, *k étant le rapport d'homothétie, le tétraèdre* $T_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$ *formé par les plans transversaux réciproques des plans des faces du tétraèdre* T_1, *par rapport au tétraèdre* T, *se confond avec le transformé de celui-ci par l'homothétie* $[\omega, -(2+k)]$, *le centre* ω *étant défini par la relation*

$$\overline{P\omega} = \frac{4\,\overline{PG}}{3+k},$$

G *désignant le centre de gravité du tétraèdre* T.

En effet, si l'on désigne par P_a, P_b, P_c, P_d les projections orthogonales de P sur les plans BCD, CDA, DAB, ABC, par H_a, H'_a, H_{1a} celles du point A sur les plans BCD, B′C′D′, $B_1C_1D_1$, on obtient

$$\overline{AH_{1a}} = \overline{H'_aH_a} = (1-k).\ \overline{PP_a}.$$

Le tétraèdre anticomplémentaire T″ du tétraèdre T est le transformé de celui-ci par l'homothétie (G, — 3). La distance $P''P''_a$ de l'homothétique P″ de P dans l'homothétie (G, — 3), au plan B″C″D″ a pour mesure

$$\overline{P''P''_a} = -3\,\overline{PP_a} = -\frac{3}{1-k}.\overline{H''H''_a} = -\frac{3}{1-k}.\overline{AH_{1a}}.$$

La distance du point P″ au plan $B_1C_1D_1$ est donc

$$\overline{P''P_{1a}} = \overline{P''P''_a} + \overline{AH_{1a}} = -(2+k).\ \overline{PP_a} = \frac{2+k}{3}.\ \overline{P''P''_a}.$$

De même

$$\overline{P''P_{1b}} = \frac{2+k}{3}.\ \overline{P''P''_b},\ \overline{P''P_{1c}} = \frac{2+k}{3}.\ \overline{P''P''_c},$$

$$\overline{P''P_{1d}} = \frac{2+k}{3}\ P''P''_d.$$

Dès lors, le tétraèdre T_1 est déjà le transformé de T″ par l'homothétie $\left(P'',\ \frac{2+k}{3}\right)$, ensuite celui du tétraèdre T par l'homothétie $[\omega, -(2+k)]$, dont le centre est tel que $\omega P'' = -(2+k).\ \omega P$,

d'où

$$\frac{\overline{\omega P''}}{-(2+k)} = \frac{\overline{\omega P}}{1} = \frac{\overline{PP''}}{-(3+k)} = -\frac{\overline{4PG}}{3+k},$$

autrement dit

$$\overline{P\omega} = \frac{\overline{4PG}}{3+k}.$$

N. B. — Le rapport des volumes des tétraèdres T_1 et T est égal à $-(2+k)^3$ en grandeur et en signe. Quand le point P coïncide avec le centre d'une sphère tangente aux plans des faces de T, le point P'' se confond avec le centre d'une sphère tangente aux plans des faces de T_1. Lorsque $k = 1$, les tétraèdres T, T_1 sont confondus. Si $k = -2$, les points A_1, B_1, C_1, D_1 coïncident. Enfin, si $k = -1$, les tétraèdres T et T_1 sont symétriques par rapport au point ω tel que $P\omega = 2PG$ et leurs volumes sont égaux, mais de signes contraires.

3. THÉORÈME — *Cinq plans étant donnés, les plans transversaux réciproques de chacun d'eux par rapport au tétraèdre formé par les quatre autres sont parallèles.*

a) ANALOGIE EN GÉOMÉTRIE PLANE. Soient M, N, P les milieux des segments $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ dont les extrémités α, β, γ coïncident avec les points de rencontre d'une transversale Δ avec les côtés BC, CA, AB d'un triangle; β', γ' l'un des sommets des parallélogrammes $\gamma\beta\,C\beta'$, $B\gamma\,\beta\gamma'$. Les segments $\overline{\gamma\beta'}$ et $\overline{\beta C}$ étant équipollents ainsi que les segments $\overline{C\gamma'}$, $\overline{\beta' B}$, le triangle $B\gamma\beta'$ et le triangle XAY dont les sommets X, Y coïncident avec les points de rencontre de la droite de NEWTON $\delta \equiv (M,N,P)$ du quadrilatère complet $(Q) \equiv (ABC, \Delta)$ avec les droites AC, AB sont homothétiques, de sorte que l'on a

$$AX : AY = \gamma\beta' : \gamma B = \beta C : \gamma B.$$

Dès lors, si on désigne par $\Delta_a \equiv (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ la transversale réciproque de BC par rapport au triangle $A\beta\gamma$, on obtient

$$A\beta_1 = \beta C,\ A\gamma_1 = \gamma B, \text{ soit } A\beta_1 : A\gamma_1 = \beta C : \gamma B,$$

et des relations analogues pour les transversales réciproques Δ_b, Δ_c, Δ' de CA, AB, Δ dans les triangles $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$, ABC. D'où cette proposition : *dans un quadrilatère complet* (Q) *les transversales réciproques de chacun des côtés, par rapport au triangle formé par les trois autres, sont parallèles à la droite de* NEWTON.

COROLLAIRE. — *Les droites orthocentriques des quadrilatères complets* (ABC, Δ), (ABC, Δ)′,..., *sont perpendiculaires respectivement à* Δ′, Δ, ...

N. B. — Les cercles circonscrits aux triangles ABC, Aβγ, Bγα, Cαβ concourent au foyer F de la parabole inscrite au quadrilatère (Q) dont l'axe est parallèle à la droite de NEWTON δ. Il en résulte que les parallèles à δ menées par A,B,C coïncident avec les conjuguées isogonales Ax, By, Cz des axes radicaux FA, FB, FC du cercle ABC, associé aux cercles Aβγ, Bγα, Cαβ. Donc, *les transversales réciproques* Δ′, Δ_a, Δ_b, Δ_c *et la droite* δ *sont parallèles aux antiparallèles, par rapport aux angles en* A, B, C *du triangle* ABC, *des axes radicaux du cercle* ABC *avec chacun des cercles* Aβγ, Bγα, Cαβ, *et ainsi de suite.*

b) Revenons au théorème qu'il s'agit de démontrer en considérant un plan (P) qui rencontre les arêtes DA, DB, DC, BC, CA, AB d'un tétraèdre T aux point α, β, γ, α′, β′, γ′ dont les isotomiques sur les arêtes correspondantes sont situés dans le plan réciproque (P′) de (P). Soient (P_D), (P_A), (P_B), (P_C) les plans réciproques des plans ABC, BCD, CDA, DAB par rapport aux tétraèdres Dαβγ, Aαβ′γ′, Bβγ′α′, Cγα′β′. Les traces du plan (P_D) sur les plans DAB, BCD, CDA se confondent avec les transversales réciproques A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 de AB, BC, CA par rapport aux triangles DAB, BCD, CDA tandis que les traces du plan (P_A) sur les plans ABC, DAB, CDA coïncident avec les transversales réciproques B_2C_2, D_2B_2, C_2D_2 de BC, DB, CD pour les triangles ABC, DAB, CDA. Comme A_1B_1 et B_2D_2 sont parallèles ainsi que C_1A_1 et C_2D_2, les plans $(P_D) \equiv (A_1B_1, C_1A_1)$, $(P_A) \equiv (B_2D_2, C_2D_2)$ sont parallèles entre eux de même que les plans (P_B), (P_C), (P_D), par analogie, ce qui achève de démontrer le théorème.

COROLLAIRES. — 1. *Les plans* (P′), (P_A), (P_B), (P_C), (P_D) *sont parallèles au plan que décrit le pôle du plan de l'infini par rapport à la surface de* STEINER Σ *d'équation tangentielle*

$$\Sigma \equiv \frac{\alpha}{l} + \frac{\beta}{m} + \frac{\gamma}{n} + \frac{\delta}{p} = 0,$$

par rapport au tétraèdre T, *et tangente au plan*

$$(P) \equiv ux + vy + wz + st = 0,$$

si l'on a

$$\frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} + \frac{\gamma}{w} + \frac{\delta}{s} = 0. \tag{1}$$

En effet, si on désigne les mesures des aires des faces BCD, CDA,

DAB, ABC de T par A, B, C, D, il résulte des coordonnées normales

$$\frac{x}{\beta CD + \gamma BD + \delta BC} = \frac{y}{\alpha CD + \gamma AD + \delta AC} = \frac{z}{\alpha BD + \beta AD + \delta AB}$$
$$= \frac{t}{\alpha BC + \beta AC + \gamma AB} = \frac{1}{\lambda}$$

du pôle du plan de l'infini par rapport à Σ,

$$\frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} + \frac{\delta}{D} = \frac{\lambda x}{BCD}, \quad \frac{\gamma}{C} + \frac{\delta}{D} + \frac{\alpha}{A} = \frac{\lambda y}{CDA},$$

$$\frac{\delta}{D} + \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} = \frac{\lambda z}{DAB}, \quad \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = \frac{\lambda t}{ABC};$$

d'où

$$\alpha = -\frac{\lambda A}{ABCD}(-Ax + By + Cz + Dt).$$

D'après (1), le lieu du pôle du plan de l'infini pour Σ,

$$\frac{A}{u}(-Ax + By + Cz + Dt) + \frac{B}{v}(Ax - By + Cz + Dt)$$
$$+ \frac{C}{w}(Ax + By - Cz + Dt) + \frac{D}{s}(Ax + By + Cz - Dt) = 0$$

ou

$$(Ax+By+Cz+Dt)\left(\frac{A}{u}+\frac{B}{v}+\frac{C}{w}+\frac{D}{s}\right) - 2\left(\frac{A^2x}{u}+\frac{B^2y}{v}+\frac{C^2z}{w}+\frac{D^2t}{s}\right) = 0$$

est donc un plan parallèle aux cinq plans réciproques (P′), (P_A), (P_B), (P_C), (P_D), car le plan (P′) a pour équation

$$(P') \equiv \frac{A^2x}{u} + \frac{B^2y}{v} + \frac{C^2z}{w} + \frac{D^2t}{s} = 0.$$

2°. *Les cinq droites de* NEWTON *des quadrilatères complets formés dans chacun des plans par les traces des quatre autres sont parallèles à un même plan.*

3°. *Si l'on désigne par* π_a, π_b, π_c, π_d *les plans radicaux de la sphère* ABCD *avec les sphères* $D\alpha\beta\gamma$, $A\alpha\beta'\gamma'$, $B\beta\gamma'\alpha'$, $C\gamma\alpha'\beta'$, *les sections antiparallèles de ces plans dans les angles trièdres de sommets* A,B,C,D *sont parallèles entre elles et la direction commune de leurs plans est celle des plans* (P′), (P_A), (P_B), (P_C), (P_D).

4°. *Soient* G, *et* G_a, G_b, G_c, G_d *les centres de gravité de* T *et des faces*

BCD, CDA, DAB, ABC. *Les six points tels que le point de rencontre* Gad *du plan* (BC, α) *avec la droite* G_aG_d *sont dans un même plan dont le transformé par l'homothétie* (G, 3) *se confond avec le plan réciproque du plan* (P) *par rapport au tétraèdre fondamental.*

4. Théorème. — *Si un plan variable* (P) *passe par un point fixe* Q, *son réciproque* (P'), *par rapport à un tétraèdre* T, *enveloppe une surface de la troisième classe et du quatrième ordre coupant les plans des faces du tétraèdre suivant des coniques doubles tangentes aux arêtes. Si le point* Q *est à l'infini, la surface touche le plan de l'infini en* Q.

Le réciproque (P') du plan

$$(P) \equiv ux + vy + wz + st = 0,$$

ayant pour équation normale

$$(P') \equiv \frac{A^2x}{u} + \frac{B^2y}{v} + \frac{C^2z}{w} + \frac{D^2t}{s} = 0,$$

enveloppe la surface

$$(S) \equiv A^2x_o\, vws + B^2y_o\, uws + C^2z_o\, uvs + D^2t_o\, uvw = 0\,.$$

Lorsque (P) pivote autour d'un point Q $(x_o, y_o, z_o. t_o)$; son équation ponctuelle s'écrit

$$A\sqrt{xx_o} + B\sqrt{yy_o} + C\sqrt{zz_o} + D\sqrt{tt_o} = 0.$$

Tout plan tangent à cette surface de Steiner la coupe suivant deux coniques et les faces du tétraèdre T selon deux coniques doubles inscrites dans les triangles BCD, CDA, DAB, ABC. Réciproquement, le plan réciproque de tout plan tangent à (S) passe par le point Q.

La surface (S) est tangente au plan de l'infini quand

$$Ax_o + By_o + Cz_o + Dt_o = 0,$$

Q étant dans le plan de l'infini, et les coordonnées x, y, z, t du point de contact sont proportionnelles aux quantités

$$\frac{By_o+Cz_o+Dt_o}{A}, \frac{Ax_o+Cz_o+Dt_o}{B}, \frac{Ax_o+By_o+Dt_o}{C}, \frac{Ax_o+By_o+Cz_o}{D}$$

de sorte que

$$\frac{x}{x_o} = \frac{y}{y_o} = \frac{z}{z_o} = \frac{t}{t_o},$$

ce qui achève de démontrer le théorème.

NOTES. — En géométrie plane, la condition nécessaire et suffisante pour que les transversales réciproques des côtés B'C', C'A', A'B' d'un triangle T' par rapport à un triangle T $\equiv$ ABC soient concourantes est que T et T' soient circonscrits à une même conique. Dans ces conditions, les transversales réciproques des droites BC, CA, AB par rapport à T sont aussi concourantes.

Il n'y a pas en général, d'analogie entre deux tétraèdres T et T' circonscrits à la surface (S) de STEINER précitée. En effet, si le tétraèdre T' est circonscrit à (S), les réciproques des plans de ses faces, par rapport à T, sont concourants, tandis que les réciproques des plans des faces de T pour T' ne passent par un même point que si les plans des faces de T sont tangents à la surface (S') de T'. Cela provient de ce que T et T' ne jouent pas le même rôle par rapport à (S), car les plans des faces de T sont des plans tangents singuliers à (S), et ceux des faces de T' des plans tangents ordinaires.

2° Si le plan (P) passe par deux points fixes $Q_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $Q_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$, le plan réciproque (P') enveloppe la développable circonscrite aux surfaces

$$\Sigma A^2 x_1 vws = 0 , \qquad \Sigma A^2 x_2 vws = 0 .$$

Les plans (P), (P') sont parallèles quand Q_1, Q_2 sont à l'infini.

5. PLANS RÉCIPROQUES RECTANGULAIRES. Si l'on désigne par a, a', b, b', c, c' les mesures des dièdres suivant les arêtes BC, DA, CA, DB, AB, DC d'un tétraèdre T, deux plans transversaux réciproques (P), (P'), par rapport à ce tétraèdre, sont rectangulaires si l'on a

$(A^2 + B^2 + C^2 + D^2)uvws - (A^2v^2 + B^2u^2)ws \cos c' - (A^2w^2 + C^2u^2)vs \cos b' - (A^2s^2 + D^2u^2)vw \cos a - (B^2w^2 + C^2v^2)us \cos a' - (B^2s^2 + D^2v^2)uw \cos b - (C^2s^2 + D^2w^2)uv \cos c = 0$,

ou encore

$A^2vws(-u + v \cos c' + w \cos b' + s \cos a) + B^2uws(u \cos c' - v + w \cos a' + s \cos b) + C^2uvs(u \cos b' + v \cos a' - w + s \cos c) + D^2uvw(u \cos a + v \cos b + w \cos c - s) = 0$, et enfin l'équation

$(Av - Bu)^2ws \cos c' + (Aw - Cu)^2vs \cos b' + (As - Du)^2vw \cos a + (Bw - Cv)^2us \cos a' + (Bs - Dv)^2uw \cos b + (Cs - Dw)^2uv \cos c = 0$,

qui représente une surface de quatrième classe admettant les plans des faces et celui de l'infini comme plans tangents doubles.

Sur les rangs-lignes à droite de deux matrices inverses

PAR

Robert BALLIEU

0. La présente note montre que les rangs-lignes à droite de deux matrices sur un corps non commutatif, inverses l'une de l'autre, ne sont pas nécessairement égaux. De façon plus précise, il existe, sur tout pareil corps, des matrices d'ordre trois, inverses l'une de l'autre et de rangs-lignes à droite inégaux. Par contre, pour certains corps non commutatifs, les rangs-lignes à droite de deux matrices d'ordre deux, inverses l'une de l'autre, sont nécessairement égaux.

L'examen de la question fait donc apparaître deux cas. Si la relation

(R) : $[ab = ba$

ou $b^{-1}(a^{-1}b^{-1} - b^{-1}a^{-1})^{-1}(ba^{-1} - a^{-1}b)(ab - ba)^{-1}b^{-1}(ab - ba) = 1]$, (1),

est vérifiée par tous les éléments a et b d'un corps, les rangs-lignes à droite de deux matrices d'ordre deux, inverses l'une de l'autre, sont nécessairement égaux. Dans le cas contraire, il existe des matrices d'ordre deux sur le corps, inverses l'une de l'autre et de rangs-lignes à droite inégaux.

La relation (R) est identiquement vérifiée dans tout corps de quaternions sur un champ, (2).

1. Soit deux matrices A′ et B′, d'ordre deux sur un corps K, inverses l'une de l'autre et de rangs-lignes à droite inégaux. Dans ce cas, le corps K n'est pas commutatif; de plus, le rang-ligne à droite d'une des matrices, soit A′, est un; celui de l'autre est deux.

Aucun élément de la matrice A′ n'est nul. En effet, si une matrice d'ordre deux sur un corps est de rang-ligne à droite égal à un et a un élément nul, elle a une rangée d'éléments nuls et n'est pas inversible.

---

(1) La seconde égalité de la relation (R) est équivalente à :

$$1 + a(ab - ba)^{-1}b = (ab - ba)^{-1}b(ab - ba)^{-1}a(ab - ba);$$

Le premier membre de cette nouvelle égalité est encore égal à $[a(a^{-1}b^{-1} - b^{-1}a^{-1})b]^{-1}$ et à $a(ab - ba)^{-1}aba^{-1}$. Ces affirmations sont justifiées dans le corps de la note.

(2) Le mot « champ » désigne un corps commutatif.

Soit alors k le premier élément de A'. La matrice $A = k^{-1} A'$ est encore inversible et de rang-ligne à droite égal à un; l'inverse $B'k$ de A est, avec B', de rang-ligne à droite égal à deux. Le premier élément de la matrice A est 1; cette matrice, étant de rang-ligne à droite égal à un, a la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & ab \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le problème de l'existence de deux matrices d'ordre deux sur un corps K, inverses l'une de l'autre et de rangs-lignes à droite inégaux est équivalent à celui de l'existence pour le corps K d'une matrice A de la forme précédente, inversible et dont l'inverse soit de rang-ligne à droite égal à deux.

Une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de la matrice A est la non-commutavité des éléments a et b.

Supposons cette condition remplie et posons $r = (ab - ba)^{-1}$. L'inverse B de la matrice A est alors :

$$B = \begin{pmatrix} 1 + arb & -ar \\ -rb & r \end{pmatrix}.$$

En effet, l'on a immédiatement :

$$b(1 + arb) + ab(-rb) = b + (ba - ab)rb = b - b = 0;$$
$$b(-ar) + abr = (ab - ba)r = 1;$$

le produit AB est bien la matrice-unité. Tenant compte de cette vérification et du fait que le produit BA est aussi la matrice-unité, nous avons :

$$1 + arb = b^{-1} abrb = araba^{-1}.$$

La valeur commune de ces expressions est encore

$$[a(a^{-1} b^{-1} - b^{-1} a^{-1})b]^{-1},$$

comme le montre la suite d'égalités :

$$(araba^{-1})^{-1} = ab^{-1}a^{-1}(ab - ba)a^{-1} = a(a^{-1} - b^{-1} a^{-1}b)$$
$$= a(a^{-1} b^{-1} - b^{-1} a^{-1})b.$$

Formant la combinaison linéaire à droite $[L_1 - L_2 r^{-1}(-ar)]$ des lignes L_i de B, nous voyons que le rang-ligne à droite de B est un si l'égalité

(1) $$1 + arb = rbr^{-1}ar$$

est vérifiée, et est deux dans le cas contraire. Compte tenu des remarques sur $(1 + arb)$, l'égalité (1) est équivalente à

$$[a(a^{-1}\,b^{-1} - b^{-1}\,a^{-1})b]^{-1}\,[rbr^{-1}ar]^{-1} = 1\ ;$$

c'est-à-dire à l'égalité

$$b^{-1}(a^{-1}b^{-1} - b^{-1}\,a^{-1})^{-1}(ba^{-1} - a^{-1}b)\ (ab - ba)^{-1}\ b^{-1}\ (ab - ba) = 1,$$

figurant dans la relation (R).

Par conséquent, si la relation (R) est vérifiée par tous les éléments a et b d'un corps K, les rangs-lignes à droite de deux matrices d'ordre deux sur K, inverses l'une de l'autre, sont nécessairement égaux. Si, par contre, les éléments a et b du corps K ne vérifient pas la relation (R), la matrice A formée à partir de ces éléments est inversible et n'a pas le même rang-ligne à droite que son inverse.

2. En vue de montrer l'existence pour tout corps non commutatif de matrices d'ordre trois sur ce corps, inverses l'une de l'autre et de rangs-lignes à droite inégaux, considérons, sur un corps quelconque, la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & w_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de la matrice C est :

(2) $$v_2 \neq v_1u_2 + v_3w_2,$$

et s'obtient en exprimant que le rang-ligne à gauche de C est trois.

Supposons cette condition remplie et posons

(3) $$r = (v_2 - v_1u_2 - v_3w_2)^{-1}.$$

L'inverse D de la matrice C s'écrit :

$$D = \begin{pmatrix} 1 + u_2rv_1 & -u_2r & u_2rv_3 \\ -rv_1 & r & -rv_3 \\ w_2rv_1 & -w_2r & 1 + w_2rv_3 \end{pmatrix}.$$

Le rang-ligne à droite de la matrice C est trois si l'on a :

(4) $$v_2 \neq u_2v_1 + w_2v_3\ ;$$

sinon, il vaut deux.

Lorsque la matrice D existe, c'est-à-dire lorsque r a un sens, son

rang-ligne à ligne à droite est égal, L_i désignant la $i^{ème}$ ligne de D, à celui de la matrice

$$\begin{pmatrix} L_1 - L_2 r^{-1}(-u_2 r) \\ L_2 \\ L_3 - L_2 r^{-1}(-w_2 r) \end{pmatrix};$$

le rang-ligne à droite de D est donc égal à $(1 + l)$, où l est le rang-ligne à droite de la matrice :

$$F = \begin{pmatrix} 1 + u_2 r v_1 - r v_1 r^{-1} u_2 r & u_2 r v_3 - r v_3 r^{-1} u_2 r \\ w_2 r v_1 - r v_1 r^{-1} w_2 r & 1 + w_2 r v_3 - r v_3 r^{-1} w_2 r \end{pmatrix}.$$

Observons encore que la somme des colonnes de F est la matrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 + u_2 r(v_1 + v_3) - r(v_1 + v_3) r^{-1} u_2 r \\ 1 + w_2 r(v_1 + v_3) - r(v_1 + v_3) r^{-1} w_2 r \end{pmatrix}.$$

3. Nous pouvons maintenant établir l'existence, sur tout corps non commutatif K, de matrices d'ordre trois, inverses l'une de l'autre et de rangs-lignes à droite inégaux.

Si (R) n'est pas identiquement vérifiée sur K, il suffit de prendre la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ b & ab & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où a et b ne vérifient pas (R). Cette matrice est inversible; son rang-ligne à droite est deux; celui de son inverse est trois.

Passons au cas où (R) est identiquement vérifiée sur K. Si nous parvenons à choisir les éléments u_2, v_1, v_2, v_3 et w_2 de C de façon à satisfaire à (2) et à (4) et aussi aux conditions

$$(5) \qquad v_2 - v_1 u_2 - w_3 v_2 = u_2(v_1 + v_3) - (v_1 + v_3) u_2 ;$$

$$(6) \qquad v_2 - v_1 u_2 - w_3 v_2 = w_2(v_1 + v_3) - (v_1 + v_3) w_2 ,$$

nous obtiendrons une matrice C inversible et de rang-ligne à droite égal à trois. La quantité r définie par (3) satisfera de plus à :

$$r = [u_2(v_1 + v_3) - (v_1 + v_3)u_2]^{-1} = [w_2(v_1 + v_3) - (v_1 + v_3)w_2]^{-1},$$

et, en vertu de la relation (R), G sera la matrice-nulle. Le rang-colonne à gauche de F, égal au rang-ligne à droite de F, sera donc

strictement inférieur à deux; le rang-ligne à droite de D sera strictement inférieur à trois. Les rangs-lignes à droite de C et D seront différents, et notre but, atteint.

Le système de conditions (2), (4), (5) et (6) est soluble sur tout corps gauche. Il revient à :

$$v_2 = v_1 u_2 + v_3 w_2 + u_2 (v_1 + v_3) - (v_1 + v_3) u_2 \; ; \tag{7}$$

$$u_2 (v_1 + v_3) - (v_1 + v_3) u_2 \neq 0 \; ; \tag{8}$$

$$(u_2 - w_2) v_3 - v_3 (u_2 - w_2) \neq 0 \; ; \tag{9}$$

$$(u_2 - w_2) (v_1 + v_3) - (v_1 + v_3) (u_2 - w_2) = 0 \, . \tag{10}$$

Les conditions (8), (9) et (10) imposent d'abord de prendre pour $x = u_2$ et $y = u_2 - w_2$ deux éléments n'appartenant pas au centre de K et tels que le sous-corps K_y des éléments de K commutables à y ne soit pas contenu dans le sous-corps K_x des éléments commutables à x. De pareils éléments existent dans tout corps non commutatif: il suffit déjà de prendre pour x et y deux éléments non commutables. Pour satisfaire aux conditions (8), (9) et (10), il ne reste plus qu'à prendre : pour v_3 un élément t non commutable à y, et, pour $(v_1 + v_3)$, un élément z de la différence $(K_y - K_x)$, prise au sens de la théorie des ensembles. En posant

$$u_2 = x; \quad w_2 = x - y; \quad v_3 = t; \quad v_1 = z - t \, ,$$

nous obtenons la solution générale des conditions (8), (9) et (10); v_2 s'obtient ensuite par la relation (7).

Tout corps non commutatif renferme donc des éléments satisfaisant à (2), (4), (5) et (6), ce qui achève de démontrer la propriété énoncée au début du paragraphe.

Remarque. La matrice D peut, dans le dernier cas étudié, être de rang-ligne à droite égal à un. Soit en effet un corps K non commutatif satisfaisant identiquement à (R). Soit a et b, deux éléments non commutables. Prenons

$$u_2 = v_3 = a; \quad v_1 = - w_2 = b$$

et calculons v_2 par la relation (7), qui donne :

$$v_2 = ba - ab + a(a + b) - (a + b) a = 0 \, .$$

Les relations (8), (9) et (10) sont satisfaites. Nous avons encore

$$r^{-1} = ab - ba = (- b) a - a(- b) \, . \tag{11}$$

Les termes de la diagonale principale de F deviennent :

$$1 + u_2 rv_1 - rv_1 r^{-1} u_2 r = 1 + arb - rbr^{-1} ar ;$$
$$1 + w_2 rv_3 - rv_3 r^{-1} w_2 r = 1 + (-b) ra - ra r^{-1}(-b) r ,$$

et sont nuls en raison de (R) et de (11). Comme de plus, la matrice G, somme des colonnes de F est nulle, F est la matrice nulle et D est de rang 1.

4. Montrons enfin que la relation (R) est identiquement vérifiée sur tout corps K de quaternions sur un champ C.

Soit : $e_0 = 1$, e_1, e_2 et e_3 les unités quaternioniques; $x = \sum_0^3 x_i e_i$, ($x_i \in C$), un quaternion quelconque. Nous désignons : par x', la partie scalaire x_0 de x; par x'', la partie vectorielle $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ de x; par $N(x)$, la norme $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ de x.

Nous avons alors pour deux quaternions quelconques :

$$xy - yx = x''y'' - y''x'' ,$$

et, si x n'est pas nul,

$$x^{-1} = \frac{x' - x''}{N(x)} .$$

Soit maintenant a et b deux éléments non commutables de K; posons

$$c = b^{-1}(a^{-1}b^{-1} - b^{-1}a^{-1})^{-1} (ba^{-1} - a^{-1}b) (ab - ba)^{-1}b^{-1} (ab - ba).$$

Nous avons

$$a^{-1} b^{-1} - b^{-1} a^{-1} = \frac{a''b'' - b''a''}{N(a) N(b)} ;$$

$$ba^{-1} - a^{-1} b = \frac{a''b'' - b''a''}{N(a)} .$$

Il en résulte :

$$c = b^{-1} N(b)(ab-ba)^{-1} b^{-1}(ab-ba) = N(b) b^{-1}(ab-ba)^{-1}b^{-1}(ab-ba).$$

Nous avons ensuite :

$$b^{-1} a - ab^{-1} = \frac{a''b'' - b''a''}{N(b)} = \frac{ab - ba}{N(b)} ;$$

$$N(b)\, b^{-1} (ab-ba)^{-1} b^{-1} = b^{-1} (b^{-1} a - ab^{-1})^{-1} b^{-1} = (ab-ba)^{-1};$$

$$c = (ab - ba)^{-1} (ab - ba) = 1 .$$

La relation (R) est identiquement vérifiée sur K.

Application de la méthode des fonctions majorantes à l'étude de certaines équations intégro-différentielles récurrentes

PAR

R.H. GERMAY

RÉSUMÉ. Dans une étude précédente (1), nous avons appliqué la méthode des approximations successives pour établir, en variables réelles, l'existence, la continuité et l'unicité des solutions d'équations intégro-différentielles récurrentes. Lorsque les seconds membres des équations intégro-différentielles récurrentes sont des fonctions holomorphes de leurs arguments, on obtient, en variables complexes, des résultats plus précis par l'emploi de la méthode des fonctions majorantes. Les développements des raisonnements et des calculs sont analogues à ceux dont il a été fait usage dans des articles antérieurs (2).

§ 1. THÉORÈME. *Considérons la suite indéfinie de fonctions de variables complexes*

(1) $F_1(x; u, v; w_1, \ldots w_k), F_2(x; u, v; w_1, \ldots w_k), \ldots F_n(x; u, v; w_1, \ldots w_k), \ldots$

holomorphes dans les cercles (C), (C_1), (C_2), (Γ_1), $\ldots$ (Γ_k) *de centres respectifs*

$$x_o,\ u_o = y_o,\ v_o = y_o,\ o,\ \ldots,\ 0$$

et de rayons respectifs ρ *pour* (C), ρ' *pour* (C_1) *et* (C_2), ρ'' *pour* (Γ_1), $\ldots$ (Γ_k). *Supposons l'holomorphie réalisée aussi sur les circonférences de ces cercles, c'est-à-dire, en définitive pour les valeurs de* x, u, v, w_1, $\ldots$ w_k *satisfaisant à*

(2) $|x - x_o| \leqslant \rho, |u - u_o| \leqslant \rho', |v - v_o| \leqslant \rho', |w_j| \leqslant \rho'', (j = 1, \ldots k).$

---

(1) R.H. GERMAY : Sur des équations intégro-différentielles récurrentes *(Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège,* 1949, pp. 250-258).

(2) R.H. GERMAY : Application de la méthode des fonctions majorantes à l'étude de certaines équations intégro-différentielles *(Id.,* 1933, pp. 78-83); Application de la méthode des fonctions majorantes à la théorie des équations récurro-différentielles *(Id.,* 1950, pp. 359-368); Application de la méthode des fonctions majorantes à la théorie des systèmes d'équations récurro-différentielles *(Id.,* 1951, pp. 2-13).

Supposons les fonctions F_n *bornées dans leur ensemble dans le champ de variation* (2). *Désignons par*

$$(3)\quad \begin{cases} f_{1,1}(x, s; u, v),\ f_{1,2}(x, s; u, v),\ \ldots\ f_{1,n}(x, s; u, v),\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{k,1}(x, s; u, v),\ f_{k,2}(x, s; u, v),\ \ldots\ f_{k,n}(x, s; u, v),\ \ldots \end{cases}$$

des suites indéfinies de fonctions holomorphes dans les cercles

$$(4)\quad |x - x_o| \leqslant \rho\,,\quad |s - x_o| \leqslant \rho\,,\quad |u - u_o| \leqslant \rho'\,,\quad |v - v_o| \leqslant \rho'$$

et sur leurs circonférences. Supposons-les bornées dans leur ensemble.

Considérons les équations intégro-différentielles récurrentes

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = F_1\Big\{x; y_1(x), y_2(x); \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_{1,1}[x, s; y_1(s), y_2(s)]ds, \ldots \int_{x_0}^{x} f_{1,k}[x, s; y_1(s), y_2(s) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = F_n\Big\{x; y_n(x), y_{n+1}(x); \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_{n,1}[x, s; y_n(s), y_{n+1}(s)]ds, \ldots \int_{x_0}^{x} f_{n,k}[x, s; y_n(s), y_{n+1}(s) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Pour des valeurs de x *suffisamment voisines de* x_o, *elles définissent un système unique de solutions holomorphes*

$$(6)\qquad y_1 = \varphi_1(x)\,,\ \ y_2 = \varphi_2(x)\,,\ \ldots\ y_n = \varphi_n(x)\,,\ \ldots$$

prenant en x_o *la valeur* $y_o = u_o = v_o$.

§ 2. Construction des développements formels des solutions annoncées

Si les solutions holomorphes des équations (5) existent, elles sont développables en séries de Taylor pour des valeurs de $|x - x_o|$ suffisamment petites

$$(7)\quad \varphi_n(x) = c_{n0} + c_{n1}\cdot\frac{x - x_o}{1\,!} + c_{n2}\frac{(x - x_o)^2}{2\,!} + \ldots + c_{np}\frac{(x - x_o)^p}{p\,!} + \ldots$$

Elles donnent lieu aux identités

$$(8)\ \varphi_n(x) = y_o + \int_{x_0}^{x} F_n[s; \varphi_n(s), \varphi_{n+1}(s); w_{n1}(s), \ldots w_{nk}(s)]ds,\ (n=1, 2, \ldots)$$

moyennant les abréviations

$$(9) \qquad w_{nj}(s) = \int_{x_0}^{s} f_{n,j}[s,\ t;\ \varphi_n(t),\ \varphi_{n+1}(t)]dt\ , \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots\ k).$$

Les équations (5) et les conditions initiales imposées à leurs solutions éventuelles permettent de calculer les valeurs numériques des coefficients c_{nr}. En effet

$$(10) \qquad c_{no} = y_o,\ c_{n1} = \left(\frac{d\varphi_n}{dx}\right)_{x=x_o},\ \ldots\ c_{np} = \left(\frac{d^p\varphi_n}{dx^p}\right)_{x=x_o},\ \ldots$$

L'identité générale (8) donne successivement

$$(11) \qquad \frac{d\varphi_n}{dx} = \mathrm{F}_n[x;\varphi_n(x),\ \varphi_{n+1}(x);\ w_{n1}(x),\ \ldots\ w_{nk}(x)]$$

$$(12) \qquad \left(\frac{d\varphi_n}{dx}\right)_{x=x_o} = \mathrm{F}_n[x_o;\varphi_n(x_o),\ \varphi_{n+1}(x_o);\ w_{n1}(x_o),\ \ldots\ w_{nk}(x_o)]$$
$$= \mathrm{F}_n(x_o;\ y_o,\ y_o;\ o,\ \ldots\ o)$$

Il vient ensuite

$$(13) \qquad \frac{d^2\varphi_n}{dx^2} = \frac{\partial \mathrm{F}_n}{\partial x}[x;\varphi_n(x),\varphi_{n+1}(x);w_{n1}(x),\ldots w_{nk}(x)] + \frac{\partial \mathrm{F}_n}{\partial u}[x;\ldots]\frac{d\varphi_n}{dx}$$
$$+ \frac{\partial \mathrm{F}_n}{\partial v}[x;\ldots]\frac{d\varphi_{n+1}}{dx} + \frac{\partial \mathrm{F}_n}{\partial w_1}[x;\ldots]\frac{dw_{n1}}{dx} + \ldots + \frac{\partial \mathrm{F}_n}{\partial w_k}[x;\ldots]\frac{dw_{nk}}{dx}$$

D'après la formule de Leibniz

$$(14) \qquad \frac{dw_{nj}}{dx} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f_{nj}}{\partial x}[x,\ s;\varphi_n(s),\ \varphi_{n+1}(s)]ds + f_{nj}[x,\ x;\ \varphi_n(x),\ \varphi_{n+1}(x)]$$

Par conséquent

$$(15) \qquad \left(\frac{d^2\varphi_n}{dx^2}\right)_{x=x_o} = \frac{\partial \mathrm{F}_n}{\partial x}(x_o;y_o,y_o;o,\ldots o)$$
$$+ \frac{\partial \mathrm{F}_n}{\partial u}(x_o;y_o,y_o;o,\ \ldots\ o)\ \mathrm{F}_n(x_o;y_o,y_o;o,\ldots o)$$
$$+ \frac{\partial \mathrm{F}_n}{\partial v}(x_o;y_o,y_o;o,\ \ldots\ o)\ \mathrm{F}_{n+1}(x_o;y_o,y_o;o,\ \ldots\ o)$$
$$+ \frac{\partial \mathrm{F}_n}{\partial w_1}(x_o;\ y_o,\ y_o;\ o,\ \ldots\ o)\ f_{n1}(x_o,\ x_o;\ y_o,\ y_o)$$
$$+ \ldots + \ldots + \frac{\partial \mathrm{F}_n}{\partial w_k}(x_o;\ y_o,\ y_o;\ o,\ \ldots\ o)\ f_{nk}(x_o,\ x_o;\ y_o,\ y_o)$$

De proche en proche, on détermine ainsi tous les coefficients des développements (7). Ce sont des sommes à coefficients entiers positifs de produits de dérivées partielles des F_n où l'on a fait

$$(16) \qquad x = x_o, \quad u = y_o, \quad v = y_o, \quad w_1 = w_2 = \ldots = w_k = 0$$

et de dérivées partielles des f_{nj} où l'on a fait

$$(17) \qquad x = x_o, \quad s = x_o, \quad u = y_o, \quad v = y_o$$

§ 3. Convergence des développements formels (7). Si nous pouvons établir la convergence des développements formels (7), nous pourrons affirmer qu'ils représentent des solutions holomorphes des équations (5); car, par construction, les fonctions holomorphes

$$(18) \qquad \theta_n(x) = \frac{d\varphi_n}{dx} - F_n[x; \varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x); w_{n1}(x), \ldots w_{nk}(x)], \quad (n=1, 2, \ldots)$$

s'annulent alors, ainsi que toutes leurs dérivées, en $x = x_o$.

Désignons par F_n^* des fonctions holomorphes, majorantes des F_n, bornées dans leur ensemble et par f_{nj}^* d'autres fonctions holomorphes, majorantes des f_{nj}, bornées aussi dans leur ensemble, dans les domaines respectifs où ces fonctions sont définies. Considérons les équations intégro-différentielles récurrentes

$$(19) \qquad \frac{dY_n}{dx} = F_n^*[x, Y_n(x), Y_{n+1}(x); W_{n1}(x), \ldots W_{nk}(x)] \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$(20) \qquad W_{nj}(x) = \int_{x_o}^{x} f_{nj}^*[x, s; Y_n(s), Y_{n+1}(s)]ds, \quad (j = 1, 2, \ldots k)$$

Proposons-nous de trouver, si elles existent, leurs intégrales holomorphes $\Phi_n(x)$ prenant en $x = x_o$ les valeurs y_o. En reprenant les considérations précédentes, nous pouvons, du point de vue formel, construire leurs développements en série de Taylor

$$(21) \qquad \Phi_n(x) = C_{no} + C_{n1} \cdot \frac{x - x_o}{1!} + \ldots + C_{np} \cdot \frac{(x - x_o)^p}{p!} + \ldots$$

Ces développements sont majorants pour les développements (7) et l'on a

$$(22) \qquad |c_{np}| < C_{np}$$

La difficulté de démontrer la convergence absolue et uniforme des développements (21) paraît à première vue aussi grande que celle d'établir la convergence des séries (7). On peut la résoudre en profitant de l'indétermination où l'on a laissé les fonctions F_n^* et f_n^* pour choisir celles-ci aussi simples que possible.

Désignons par M un nombre positif fixe supérieur aux modules des fonctions F_n et par $\mathfrak{M}$ un autre nombre positif fixe supérieur aux modules de toutes les fonctions f_{nj}. De tels nombres existent effectivement. Les fonctions F_n admettent pour fonction majorante

$$\Psi(x,\ u,\ v;\ w_1,\ \ldots\ w_k) = \frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{\rho}\right)\left(1-\frac{u-y_0}{\rho'}\right)\left(1-\frac{v-y_0}{\rho'}\right)\left(1-\frac{w_1}{\rho''}\right)\ldots\left(1-\frac{w_k}{\rho''}\right)} \tag{23}$$

Les fonctions f_{nj} admettent pour fonction majorante

$$\psi(x,s;\ u,v) = \frac{\mathfrak{M}}{\left(1-\frac{x-x_0}{\rho}\right)\left(1-\frac{s-x_0}{\rho}\right)\left(1-\frac{u-y_0}{\rho'}\right)\left(1-\frac{v-y_0}{\rho'}\right)} \tag{24}$$

Considérons les équations intégro-différentielles récurrentes

$$\frac{dY_n}{dx} = \Psi\left\{x;\ Y_n(x), Y_{n+1}(x); \int_{x_0}^{x} \psi[x,s;\ Y_n(s), Y_{n+1}(s)]ds, \ldots \int_{x_0}^{x} \psi[x,s;\ Y_n(s),\ Y_{n+1}(s)]\,ds\right. \tag{25}$$

et cherchons à trouver leurs solutions holomorphes, si elles existent, prenant en x_0 la valeur numérique y_0. Du point de vue formel, nous pouvons construire leurs développements en séries de Taylor. Toutes les fonctions F_n^* sont égales entre elles; il en est de même des fonctions f_{nj}^*. Toutes les intégrales $\Phi_n(x)$ ont la même valeur initiale y_0 en $x=x_0$. Tous les développements (19) sont, dans le cas actuel, identiques entre eux. Les équations (25) se réduisent à l'équation intégro-différentielle unique, non récurrente,

$$\frac{dY}{dx} = \Psi\left\{x;\ Y(x), Y(x); \int_{x_0}^{x} \psi[x,s;\ Y(s), Y(s)]ds, \ldots \int_{x_0}^{x} \psi[x,s;\ Y(s),\ Y(s)]ds.\right\} \tag{26}$$

Cette équation s'écrit encore

$$(27)\qquad \frac{dY}{dx} = \frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{\rho}\right)\left(1-\frac{Y-y_0}{\rho'}\right)^2\left\{1-\frac{1}{\rho''}\int_{x_0}^{x}\frac{\mathfrak{M}\,ds}{\left(1-\frac{x-x_0}{\rho}\right)\left(1-\frac{s-s_0}{\rho}\right)\left[1-\frac{Y(s)-y_0}{\rho'}\right.}\right.}$$

Elle admet une solution holomorphe unique

$$(28)\qquad Y(x) = \Gamma_0 + \Gamma_1\frac{x-x_0}{1!} + \ldots + \Gamma_p\frac{(x-x_0)^p}{p!} + \ldots$$

développable en série absolument et uniformément convergente dans le voisinage de x_0. Le développement (28) est majorant pour toutes les séries (7). Celles-ci convergent absolument et uniformément pour les mêmes valeurs de x. L'existence et l'holomorphie des solutions $\varphi_n(x)$ sont ainsi établies. L'unicité du système des $\varphi_n(x)$ résulte de ce que les coefficients c_{np} se déduisent univoquement des équations données et des conditions initiales imposées aux solutions.

Saive, le 8 octobre 1952.

On Meijer Transform — II

BY

J. P. JAISWAL

1. The object of this paper (1) is to obtain some new properties of the Meijer transform, by utilising the properties of Whittaker and parabolic cylinder functions. These properties are given in the form of theorems and have been illustrated by means of examples. Meijer transforms of some known functions have been obtained, and these have later been used to illustrate the theorems. The theorems help us to sum certain series, to evaluate certain integrals, and to obtain some recurrence formulae. Theorem. 8. is a generalisation of a known result in Laplace transform.

The integral

$$\Phi(s) = s\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st}\,(st)^{-k-\frac{1}{2}}\,W_{k+\frac{1}{2},m}(st)\,f(t)\,dt, \qquad (1)$$

was given by Meijer (1941), and is symbolically denoted by

$$f(t) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \Phi(s).$$

A particular case of (1) is when $k = \frac{n}{2} - \frac{1}{4}$, $m = \pm\frac{1}{4}$

and

$$\Phi(s) = 2^{-\frac{n}{2}}\,s\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st}\,(st)^{-\frac{n}{2}}\,D_n(\sqrt{2st})\,f(t)\,dt, \qquad (2)$$

where $D_n(z)$ is the parabolic cylinder function, and this we will call by the name D_n — transform.

2. We now obtain the Meijer transforms of some known functions which we shall use later on.

---

(1) This paper is in continuation of my earlier paper [2] published in *Mathematische Zeitschrift*.

a) If

$$f(t) = t^{\lambda}\ J_{\mu,\nu}\ (3t),$$

where

$$J_{\mu,\nu}\ (3t) = \frac{t^{\mu+\nu}}{\Gamma(\mu+1)\ \Gamma(\nu+1)}\ {}_0F_2\ [\mu+1,\ \nu+1;\ -t^3],$$

then ①

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^{\mu+\nu+\lambda}}\ \frac{\Gamma_*\ (\mu+\nu+\lambda+1-k\pm m)}{\Gamma(\mu+1)\ \Gamma(\nu+1)\ \Gamma(\mu+\nu+\lambda+1-2k)}\ \times$$

$${}_6F_5\left[\begin{matrix}\dfrac{\mu+\nu+\lambda+1-k\pm m}{3}, & \dfrac{\mu+\nu+\lambda+2-k\pm m}{3}, & \dfrac{\mu+\nu+\lambda+3-k\pm m}{3} \\ \mu+1,\ \nu+1, & \dfrac{\mu+\nu+\lambda+2-2k}{3}, & \dfrac{\mu+\nu+\lambda+2-2k\pm 1}{3}\end{matrix}\ ;\ -\frac{27}{s^3}\right],$$

provided R $(\mu+\nu+\lambda+1-k\pm m)>0$, R$(s)>0$, and $|s|>3$.

When $k=m$, (3) reduces to

$$\Phi(s) = \frac{\Gamma(\mu+\nu+\lambda)s^{-\mu-\nu-\lambda+1}}{\Gamma(\nu+1)\ \Gamma(\mu+1)}\ {}_3F_2\left[\begin{matrix}\dfrac{\mu+\nu+\lambda+1}{3}, & \dfrac{\mu+\nu+\lambda+2}{3}, & \dfrac{\mu+\nu+\lambda+3}{3} \\ \mu+1, \nu+1 & & \end{matrix}\ ;\ -\frac{27}{s^3}\right],$$

provided R $(\mu+\nu+\lambda+1)>0$, R $(s)>0$, and $|s|>3$.

b) If

$$f(t) = t^{\lambda}\ H_{\nu}\ (2t),$$

where $H_{\nu}\ (2t)$ is the function of Struve, then

$$\Phi(s) = \frac{\Gamma_*(\nu+\lambda+2-k\pm m)}{s^{\nu+\lambda+1}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\Gamma(\nu+\lambda+2-2k)}\ \times$$

---

① The symbol $\Gamma_*\ (a\pm b)$ denotes $\Gamma\ (a+b).\ \Gamma\ (a-b)$; and the symbol

$${}_mF_n\left[\begin{matrix}a\pm b, c\pm d, e\pm f, \ldots; \\ \alpha\pm\beta, \gamma\pm\delta, \ldots\ldots\ldots; x\end{matrix}\right] \text{ denotes}$$

$${}_mF_n\left[\begin{matrix}a+b, a-b, c+d, c-d, \ldots. \\ \alpha+\beta, \alpha-\beta, \gamma+\delta, \gamma-\delta, \ldots. \quad ; x\end{matrix}\right]$$

$$ {}_5F_4\left[\begin{matrix}\dfrac{\nu+2+\lambda\pm m-k}{2}, \dfrac{\nu+3+\lambda-k\pm m}{2}, 1 \\ \dfrac{3}{2}, \nu+\dfrac{3}{2}, \dfrac{\nu+2+\lambda-2k}{2}, \dfrac{\nu+\lambda+3-2k}{2}\end{matrix}; -\frac{4}{s^2}\right], \quad (5) $$

provided R $(\nu + 2 + \lambda - k \pm m) > 0$, R $(s) > 0$, and $|s| > 2$.

When $k = m$, (5) reduces to

$$ \Phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\nu+\lambda+2)}{s^{\nu+\lambda+1}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} {}_3F_2\left[\begin{matrix}\dfrac{\nu+\lambda+2}{2}, \dfrac{\nu+\lambda+3}{2}, 1 \\ \dfrac{3}{2}, \nu+\dfrac{3}{2}\end{matrix}; -\frac{4}{s^2}\right], \quad (6) $$

provided R $(\nu + \lambda + 2) > 0$, R $(s) > 0$, and $|s| > 2$.

c) If

$$ f(t) = t^{\lambda}\, L_{\nu}(2t), $$

where $L_{\nu}(2t)$ is the function of Struve for imaginary argument, then

$$ \Phi(s) = \frac{s^{-\nu-\lambda-1}\,\Gamma_*(\nu+\lambda+2-k\pm m)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\Gamma(\nu+2+\lambda-2k)} \times $$

$$ {}_5F_4\left[\begin{matrix}\dfrac{\nu+\lambda+2-k\pm m}{2}, \dfrac{\nu+\lambda+3-k\pm m}{2}, 1 \\ \dfrac{3}{2}, \nu+\dfrac{3}{2}, \dfrac{\nu+\lambda+2-2k}{2}, \dfrac{\nu+\lambda+3-2k}{2}\end{matrix}; \frac{4}{s^2}\right], \quad (7) $$

provided R$(\nu + \lambda + 2 - k \pm m) > 0$, R$(s) > 0$, and $|s| > 2$,

When $k = m$, (7) reduces to

$$ \Phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\lambda+\nu+2)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right) s^{\nu+\lambda+1}} {}_3F_2\left[\begin{matrix}\dfrac{\nu+\lambda+2}{2}, \dfrac{\nu+\lambda+3}{2}, 1 \\ \dfrac{3}{2}, \nu+\dfrac{3}{2}\end{matrix}; \frac{4}{s^2}\right], \quad (8) $$

provided R$(\nu + \lambda + 2) > 0$, R $(s) > 0$, and $|s| > 2$.

d) If

$$ f(t) = t^{\lambda}\ I_{\nu}(2t), $$

where $I_{\nu}(2t)$ is the Bessel function for imaginary argument, then

$$ \Phi(s) = \frac{1}{s^{\nu+\lambda}} \frac{\Gamma_*(\nu+\lambda-k+1\pm m)}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\nu+\lambda+1-2k)} \times $$

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{[\nu+\lambda-k\pm m+1}{2}, & \frac{\nu+\lambda-k+2\pm m}{2} \\ \nu+1, \frac{\nu+\lambda+1-2k}{2}, & \frac{\nu+\lambda+2-2k}{2}\end{matrix}; \frac{4}{s^2}\right], \tag{9} $$

provided R $(\nu+\lambda-k+1\pm m)>0$, R $(s)>2$, and $|s|>2$.

When $k=m$, (9) reduces to

$$ \Phi(s)=\frac{\Gamma(\nu+\lambda+1)}{\Gamma(\nu+1).s^{\nu+\lambda}}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{\nu+1}{2}, & \frac{\nu+2}{2} \\ \nu+1\end{matrix}; \frac{4}{s^2}\right], \tag{10} $$

provided R $(\nu+\lambda+1)>0$, R $(s)>2$, and $|s|>2$.

3. *Theorem* 1.

If

$$ e^{-xt}\ f(t) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \Phi(s,x), \text{ and} $$

$$ \psi(x) \stackrel{\cdot}{=\!=} t^{-(\lambda+1)}\ f(t), \text{ then} $$

$$ \frac{\psi(x)}{x}=\frac{\Gamma(\lambda-2k+1)}{\Gamma_*(\lambda-k+1\pm m)}\int_0^\infty \Phi(s,x)\ s^{\lambda-1}\ ds, \tag{11} $$

provided

(1) R$(\lambda-k+1\pm m)>0$, R $(s)>0$, R$(x)>0$ and,

(2) the integral in (11) is convergent.

Proof : —

We have

$$ e^{-xt}\ f(t) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \Phi(s,x) $$

and [2, p. 387]

$$ t^\lambda \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \frac{s^{-\lambda}\ \Gamma_*(\lambda-k+1\pm m)}{\Gamma(\lambda-2k+1)}, $$

provided R $(\lambda-k+1\pm m)>0$, and R $(s)>0$.

Hence using [2, p. 386 (R.7)] we get

$$ \frac{\Gamma(\lambda-2k+1)}{\Gamma_*(\lambda-k+1\pm m)}\int_0^\infty \Phi\ (s,x)\ s^{\lambda-1}\ ds=\frac{\psi\ (x)}{x}. $$

Example : —
Let

$$f(t) = t^{\mu}, \text{ then}$$

$$\Phi(s, x) = \frac{1}{s^{\mu}} \frac{\Gamma_*(\mu - k + 1 \pm m)}{\Gamma(\mu - 2k + 1)} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \mu - k + 1 \pm m \\ \mu - 2k + 1 \end{matrix} ; -\frac{x}{s} \right]$$

$$R(\mu - k + 1 \pm m) > 0, \; R(s) > 0$$

and

$$\psi(x) = \Gamma(\mu - \lambda) \; . \; x^{\lambda - \mu + 1}$$

$$R(\mu - \lambda) > 0.$$

Hence applying Theorem.1, we get

$$\int_0^{\infty} s^{\lambda - \mu + 1} \, {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \mu - k + 1 \pm m \\ \mu - 2k + 1 \end{matrix} ; -\frac{x}{s} \right] ds$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda - k + 1 \pm m)}{\Gamma(\lambda - 2k + 1)} \cdot \frac{\Gamma(\mu - \lambda)\,\Gamma(\mu - 2k + 1)}{\Gamma_*(\mu - k + 1 \pm m)} \, . x^{\lambda - \mu}, \qquad (12)$$

provided $R(\lambda - k + 1 \pm m) > 0$, $R(\mu - k + 1 \pm m) > 0$, $R(\mu - \lambda) > 0$, $R(x) > 0$ and $R(s) > 0$.

4. *Theorem*.2.
If

$$f(t) \xrightarrow[m]{k + \frac{1}{2}} \Phi(s), \text{ and}$$

$x^{\mu - \frac{3}{2}} \Phi(x)$ is self-reciprocal in the Hankel transform of order ν, then

$$\Phi(x) = \frac{\Gamma_*(\mu + \nu - k + 1 \pm m)\, x^{\nu + 2 - \mu}}{\Gamma(\mu + \nu - 2k + 1)\, \Gamma(\nu + 1) . 2^{\nu}} \times$$

$$\int_0^{\infty} t^{-(\mu + \nu + 1)} \, {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{\mu + \nu - k + 1 \pm m}{2}, \frac{\mu + \nu - k + 2 \pm m}{2} \\ \frac{\mu + \nu - 2k + 1}{2}, \frac{\mu + \nu - 2k + 2}{2}, \nu + 1 \end{matrix} ; -\frac{x^2}{t^2} \right], \qquad (13)$$

provided

(1) $R(\lambda_1 + \mu + \nu - 1) > 0$, where $\Phi(s) = O(s^{\lambda_1})$ for small s.
(2) $\Phi(s)\, s^{\mu - 1} J_{\nu}(x_o s)$ is bounded for $R(x) > x_o > 0$,
(3) $R(\mu + \nu) > 0$, $R(1 - k \pm m) > 0$, $R(s) > 0$; and
(4) the integral in (13) is convergent.

Proof : —

We have

$$f(t) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \Phi(s)\,,$$

and [2, p. 389],

$$t^{\mu}\, J_{\nu}(tx) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \Gamma_*(\mu+\nu-k+1\pm m)}{s^{\mu+\nu}\,\Gamma(\mu+\nu+1-2k)\,\Gamma(\nu+1)} \times$$

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{\mu+\nu-k+1\pm m}{2}, & \frac{\mu+\nu-k+2\pm m}{2} \\ \nu+1, & \frac{\mu+\nu-2k+1}{2}, \quad \frac{\mu+\nu-2k+2}{2}\end{matrix}; -\frac{x^2}{s^2}\right],$$

provided $R(\mu+\nu-k+1\pm m)>0$, $R\ (s)>0$.

Also if $x^{\mu-\frac{3}{2}}\,\Phi(x)$ is self-reciprocal in Hankel transform of order ν, we have

$$x^{\mu-\frac{3}{2}}\,\Phi(x) = \int_0^{\infty} \sqrt{sx}\,\Phi(s)\, s^{\mu-\frac{3}{2}}\, J_{\nu}(sx)\, ds. \qquad (14)$$

Applying (2, p. 386 (R.6.)] and using (14), we get

$$\Phi(x) = \frac{\Gamma_*(\mu+\nu-k+1\pm m)\, x^{\nu+2-\mu}}{\Gamma(\mu+\nu+1-2k)\,\Gamma(\nu+1)\,2^{\nu}} \times$$

$$\int_0^{\infty} {}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{\mu+\nu-k+1\pm m}{2}, & \frac{\mu+\nu-k+2\pm m}{2} \\ \nu+1, & \frac{\mu+\nu-2k+1}{2}, \quad \frac{\mu+\nu-2k+2}{2}\end{matrix}; -\frac{x^2}{t^2}\right] t^{-(\mu+\nu+1)}\, f(t)\, dt,$$

where the conditions assumed in the theorem ensure the convergence of the integrals involved.

5. *Theorem*.3.

If

$$t^{\frac{\nu+1}{2}}\, f(t) \xrightarrow[\pm\frac{1}{4}]{\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{4}} \Phi_{\gamma}(s), \text{ and}$$

$$f(t) \doteqdot \chi(s), \text{ then}$$

$$\chi(s) = 2s \sum_{\gamma=o}^{\infty} \frac{(-)^{\gamma}.2^{2\gamma}\,\gamma!\,s^{\gamma}}{(2\gamma+1)!}\,\Phi_{2\gamma+1}(s), \qquad (15)$$

provided

(1) $R(\mu) > -1$, where $f(t) = 0(t^{\mu})$ for small t,
(2) $R(s) > s_o > 0$, and $f(t)$ is continuous for $t > 0$, and
(3) $e^{-s_o t}\, f(t) \to 0$ as $t \to \infty$.

Proof : —
We have

$$s^{\gamma+\frac{1}{2}}\,\Phi_{2\gamma+1}(s) = 2^{-\left(\frac{2\gamma+1}{2}\right)} s \int_{o}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st}\, t^{\frac{1}{2}}\, D_{2\gamma+1}(\sqrt{2st})\, f(t)dt \qquad (16)$$

Multiplying both sides by $\dfrac{(-)^{\gamma}.2^{\gamma}.\gamma!}{(2\gamma+1)!}$ and summing for γ from zero to infinity, we get

$$\sum_{\gamma=o}^{\infty} \frac{(-)^{\gamma}\gamma!\, s^{\gamma+\frac{1}{2}}\, 2^{2\gamma+\frac{1}{2}}}{(2\gamma+1)!}\,\Phi_{2\gamma+1}(s) = s \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st} f(t) \left[\sum_{\gamma=o}^{\infty} \frac{(-)^{\gamma}.2^{\gamma}.\gamma!}{(2\gamma+1)!}\, D_{2\gamma+1}(\sqrt{2st})\right] t^{\frac{1}{2}}\, dt \qquad (17)$$

Using [6 , p. 110]

$$e^{-\frac{1}{2}z} = \sqrt{2z} \sum_{\gamma=o}^{\infty} \frac{(-)^{\gamma}.2^{\gamma}.\gamma!}{(2\gamma+1)!}\, D_{2\gamma+1}(\sqrt{2z}) \qquad (18)$$

(17) reduces to

$$\sum_{\gamma=o}^{\infty} \frac{(-)^{\gamma}.2^{2\gamma+1}.\gamma!}{(2\gamma+1)!}\, s^{\gamma+1}\,\Phi_{2\gamma+1}(s) = \chi(s).$$

where

$$\chi(s) \doteq f(t)$$

Regarding the change of order of summation and integration in (17) we see that

(1) the series in (18) is uniformly convergent in any fixed interval $0 \leqslant z \leqslant a$, a being arbitrary,

(2) $f(t)$ is continuous for all values of $t > 0$,

(3) $\int_{\delta}^{\infty} e^{-st}\,|f(t)|\,dt$ is convergent if $R(\mu) > -1$, where $f(t) = 0(t^{\mu})$ for small t; and

(4) $e^{-s_0 t} f(t) \to 0$ as $t \to \infty$ for R $(s) > s_o > 0$.

Hence the change of order is justified.

Example.1.

Let

$$f(t) = J_{\mu,\nu}(3t), \text{ then from (3)}$$

$$\Phi_{2\gamma+1}(s) = \frac{\Gamma_*\left(\mu+\nu+\frac{7}{4}\pm\frac{1}{4}\right)}{s^{\mu+\nu+\gamma+1}\,\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\nu+1)\,\Gamma\left(\mu+\nu-\gamma+\frac{3}{2}\right)} \times$$

$${}_6F_5\left[\begin{matrix}\frac{\mu+\nu+\frac{7}{4}\pm\frac{1}{4}}{3}, & \frac{\mu+\nu+\frac{11}{4}\pm\frac{1}{4}}{3}, & \frac{\mu+\nu+\frac{15}{4}\pm\frac{1}{4}}{3} \\ \mu+1,\ \nu+1, & \frac{\mu+\nu-\gamma+\frac{3}{2}}{3}, & \frac{\mu+\nu-\gamma+\frac{5}{2}}{3}, \quad \frac{\mu+\nu-\gamma+\frac{7}{2}}{3}\end{matrix}; -\frac{27}{s^3}\right]$$

provided R $\left(\mu+\nu+\frac{3}{2}\right) > 0$, R $(s) > 0$, and $|s| > 3$.

Also from (4), we have

$$\chi(s) = \frac{\Gamma(\mu+\nu+1)}{s^{\mu+\nu}\,\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\nu+1)}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{\mu+\nu+1}{3}, & \frac{\mu+\nu+2}{3}, & \frac{\mu+\nu+3}{3} \\ \nu+1, & \mu+1\end{matrix}; -\frac{27}{s^3}\right]$$

R $(\mu+\nu+1) > 0$, R $(s) > 0$ and $|s| > 3$.

Hence on applying Theorem.3., we get

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{\mu+\nu+1}{3}, & \frac{\mu+\nu+2}{3}, & \frac{\mu+\nu+3}{3} \\ \nu+1, & \mu+1\end{matrix}; -\frac{27}{s^3}\right]$$

$$= \frac{\Gamma_*\left(\mu+\nu+\frac{7}{4}\pm\frac{1}{4}\right).2}{\Gamma(\mu+\nu+1)} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(-)^\gamma.2^{2\gamma}\,\gamma!}{(2\gamma+1)!\,\Gamma\left((\mu+\nu-\gamma+\frac{3}{2}\right)} \times$$

$$ {}_6F_5\left[\begin{matrix}\dfrac{\mu+\nu+\frac{7}{4}\pm\frac{1}{4}}{3}, & \dfrac{\mu+\nu+\frac{11}{4}\pm\frac{1}{4}}{3}, & \dfrac{\mu+\nu+\frac{15}{4}\pm\frac{1}{4}}{3} \\ \mu+1,\ \nu+1, & \dfrac{\mu+\nu-\gamma+\frac{3}{2}}{3}, & \dfrac{\mu+\nu-\gamma+\frac{5}{7}}{3}, \quad \dfrac{\mu+\nu-\gamma+\frac{7}{2}}{3}\end{matrix}\ ;-\frac{27}{s^3}\right] \tag{19} $$

provided R $(\mu+\nu+1)>0$, R $(s)>0$, and $|s|>3$.

Example.2.

Let

$$ f(t)=\mathrm{I}_\nu(2t), \text{ then from (9)} $$

$$ \Phi_{2\gamma+1}(s)=\frac{\Gamma_*\left(\nu+\frac{7}{4}\pm\frac{1}{4}\right)}{s^{\nu+\gamma+1}\,\Gamma(\nu+1)\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}-\gamma\right)}\times $$

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix}\dfrac{\nu+\frac{7}{4}\pm\frac{1}{4}}{2}, & \dfrac{\nu+\frac{11}{4}\pm\frac{1}{4}}{2}, \\ \nu+1, & \dfrac{\nu+\frac{3}{2}-\gamma}{2}, \quad \dfrac{\nu+\frac{5}{2}-\gamma}{2}\end{matrix}\ ;\ \frac{4}{s^2}\right] $$

provided R $\left(\nu+\frac{3}{2}\right)>0$, R $(s)>2$, and $|s|>2$.

Also from (10), we have

$$ \chi(s)=\frac{1}{s^\nu}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\dfrac{\nu+1}{2}, & \dfrac{\nu+2}{2} \\ \nu+1\end{matrix}\ ;\ \frac{4}{s^2}\right],\ \mathrm{R}(\nu+1)>0,\ \mathrm{R}(s)>2 \text{ and } |s|>2 $$

Hence applying Theorem.3., we get

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\dfrac{\nu+1}{2}, & \dfrac{\nu+2}{2} \\ \nu+1\end{matrix}\ ;\ \frac{4}{s^2}\right]=\frac{2\Gamma_*\left(\nu+\frac{7}{4}\pm\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left[\frac{(-)^\gamma.2^{2\gamma}.\gamma\,!}{(2\gamma+1)!\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}-\gamma\right)}\times\right. $$

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} \nu+\frac{7}{4}\pm\frac{1}{4}, & \nu+\frac{11}{4}\pm\frac{1}{4} \\ \hline 2 & 2 \\ \nu+1, & \frac{\nu+\frac{3}{2}-\gamma}{2}, \quad \frac{\nu+\frac{5}{2}-\gamma}{2} \end{matrix}; \frac{4}{s^2}\right] \tag{20} $$

provided R $(\nu+1)>0$, R $(s)>2$, and $|s|>2$.

6. *Theorem* 4.

If

$$ t^{\gamma} f(t) \xrightarrow[0]{\gamma+\frac{1}{2}} \Phi_{\gamma}(s), \text{ and} $$

$$ \Psi(s) \doteqdot t\{t(1-h)\}, \text{ then} $$

$$ \Psi(s) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(-h)^{\gamma}.s^{\gamma}}{\gamma!} \Phi_{\gamma}(s) \tag{21} $$

provided

(1) R$(\mu)>-1$, where $f(t)=0$ (t^{μ}) for small t,

(2) $|h|<1$, and $f(t)$ is continuous for $t>0$, and

(3) $e^{-s_0 t} f\{t(1-h)\}$ is bounded for R$(s)>s_0>0$.

Proof : —

We have

$$ \Phi_{\gamma}(s) = s\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st} (st)^{-\gamma-\frac{1}{2}} W_{\gamma+\frac{1}{2},0}(st)\, t^{\gamma} f(t)\, dt $$

or

$$ s^{\gamma}\Phi_{\gamma}(s) = s\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st} (st)^{-\frac{1}{2}} W_{\gamma+\frac{1}{2},0}(st)\, f(t)\, dt $$

Multiplying both sides by $\frac{(-h)^{\gamma}}{\gamma!}$ and taking the sum from zero to infinity and using the result [1, p. 112]

$$ (1-h)^{-1} e^{-\frac{h}{1-h}x} = e^{\frac{1}{2}x} x^{-\frac{1}{2}} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(-h)^{\gamma}}{\gamma!} W_{\gamma+\frac{1}{2},0}(x), \text{for} |h|<1, \tag{22} $$

we get

$$\sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(-h)^{\gamma}}{\gamma\,!}\, s^{\gamma}\, \varphi_{\gamma}(s) = \psi(s)$$

where

$$\psi(s) \doteqdot f\{t\,(1-h)\}.$$

The change of order of integration and summation can in this case be justified on grounds similar to those of Theorem.3.

Example : —

Let

$f(t) = \mathrm{H}_{\nu}(2t)$, then from (5)

$$\Phi_{\gamma}(s) = \frac{\Gamma(\nu+2)\,\Gamma(\nu+2)\,s^{-(\nu+\gamma+1)}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\Gamma(\nu+2-\gamma)} \times$$

$$ {}_5\mathrm{F}_4\left[\begin{matrix}\frac{\nu+2}{2}, \frac{\nu+2}{2}, \frac{\nu+3}{2}, \frac{\nu+3}{2}, 1 \\ \frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \frac{\nu+2-\gamma}{2}, \frac{\nu+3-\gamma}{2}\end{matrix}\ ; -\frac{4}{s^2}\right]$$

$$\mathrm{R}(\nu+2) > 0,\ \mathrm{R}(s) > 0 \text{ and } |s| > 2.$$

and

$$\psi(s) = \frac{1}{\{(1-h)s\}^{\nu+1}}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\,{}_3\mathrm{F}_2\left[\begin{matrix}\frac{\nu+2}{2}, \frac{\nu+3}{2}, 1 \\ \frac{3}{2}, \frac{\nu+3}{2},\end{matrix}\ ; -\frac{4}{\{(1-h)s\}^2}\right]$$

$$\mathrm{R}(\nu+2) > 0,\ \mathrm{R}(s) > 0 \text{ and } |s| > \frac{2}{1-h}.$$

Applying Theorem.4., we get on simplification

$$ {}_3\mathrm{F}_2\left[\begin{matrix}\frac{\nu+2}{2}, \frac{\nu+2}{2}, 1 \\ \frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}\end{matrix}\ ; -\frac{4}{\{s(1-h)\}^2}\right]$$

$$= \frac{(1-h)^{\nu+1}}{4}\,\Gamma(\nu+2)\sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{(-h)^{\gamma}}{\gamma\,!\,\Gamma(\nu+2-\gamma)} \times$$

$$ {}_5F_4\left[\begin{matrix}\frac{\nu+2}{2}, \frac{\nu+2}{2}, \frac{\nu+3}{2}, \frac{\nu+3}{2}, 1 \\ \frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \frac{\nu+2-\gamma}{2}, \frac{\nu+3-\gamma}{2}\end{matrix}; -\frac{4}{s^2}\right] \tag{23} $$

provided $R(\nu) > -2$, $R(s) > 0$, $|h| < 1$, and $|s| > \frac{2}{1-h}$.

7. *Theorem*.5.

If

$$ t^\gamma f(t) \xrightarrow[\pm\frac{1}{4}]{\frac{\mu}{2}+\gamma-\frac{1}{4}} \Phi_{2\gamma}(s), \text{ then} $$

$$ \alpha^\mu \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}st}(st)^{-\frac{\mu-1}{2}} D_{\mu-1}(\alpha\sqrt{2st}) f(t)dt = 2^{\frac{\mu-1}{2}} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma!}\left(\frac{1}{\alpha^2}-1\right)^\gamma s^{\gamma-1}\Phi_{2\gamma}(s) \tag{24} $$

provided

(1) $R\left(\lambda - \frac{\mu}{2} + \frac{3}{2}\right) > 0$, where $f(t) = 0\ (t^\mu)$ for small t,

(2) $\alpha > 0$, and $f(t)$ is continuous for $t > 0$; and

(3) $e^{-\alpha/2\, s_o t}(s_o t)^{\frac{1-\mu}{2}} D_{\mu-1}(\alpha\sqrt{2s_o t})\, f(t)$ is bounded for $R(s) > s_o > 0$.

Proof : —

We have

$$ \Phi_{2\gamma}(s) = s\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st}(st)^{\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}-\gamma} t^\gamma D_{\mu+2\gamma-1}(\sqrt{2st}) f(t) . 2^{-\left(\frac{\mu}{2}+\gamma-\frac{1}{2}\right)} dt \tag{25} $$

Multiplying both sides by $\frac{s^{\gamma+1}}{\gamma!}\left(\frac{1}{\alpha^2}-1\right)^\gamma$ and taking the sum from zero to infinity and using the result [1, p. 116]

$$ \alpha^\mu e^{-\frac{1}{4}x^2\alpha^2} D_{\mu-1}(\alpha x) = e^{-\frac{1}{4}x^2} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma!} 2^\gamma \left(\frac{1}{\alpha^2}-1\right)^\gamma D_{\mu+2\gamma-1}(x);\ \alpha > 0. \tag{26} $$

we get

$$ \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma!}\left(\frac{1}{\alpha^2}-1\right)^\gamma s^\gamma \Phi_{2\gamma}(s) = 2^{-\frac{\mu-1}{2}} \alpha^\mu s \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 st}(st)^{\frac{1-\mu}{2}} D_{\mu-1}(\alpha\sqrt{2st}) f(t)dt $$

The change in the order of integration and summation can be justified as before.

Example.

Let

$$f(t) = L_\nu(2t), \text{ then from (7)}$$

$$\Phi_{2\gamma}(s) = \frac{\Gamma_*\left(\nu+2+\frac{3}{4}-\frac{\mu}{2}\pm\frac{1}{4}\right)}{s^{\nu+\gamma+1}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+2-\mu-\gamma+\frac{3}{2}\right)} \times$$

$${}_5F_4\left[\begin{matrix}\frac{\nu+2+\frac{3}{4}-\frac{\mu}{2}\pm\frac{1}{4}}{2}, & \frac{\nu+3+\frac{3}{4}-\frac{\mu}{2}\pm\frac{1}{4}}{2}, & 1 \\ \frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}, & \frac{\nu+2-\mu-\gamma+\frac{3}{2}}{2}, & \frac{\nu+3-\mu-\gamma+\frac{3}{2}}{2}\end{matrix}\;;\;\frac{4}{s^2}\right]$$

provided $R\left(\nu-\frac{\mu}{2}+\frac{5}{2}\right)>0$, $R(s)>0$, and $|s|>2$.

Hence applying Theorem 5., we get

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}st}\,(st)^{\frac{1-\mu}{2}}\,D_{\mu-1}(\alpha\sqrt{2st})\;L_\nu(2t)\,dt$$

$$= \frac{2^{\frac{\mu-1}{2}}\,\alpha^{-\mu}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)s^2}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{\Gamma_*\left(\nu+\frac{11}{4}-\frac{\mu}{2}\pm\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{7}{2}-\mu-\gamma\right)\gamma!}\left(\frac{1}{\alpha^2}-1\right)^\gamma \times$$

$${}_5F_4\left[\begin{matrix}1, & \frac{\nu+\frac{11}{4}-\frac{\mu}{2}\pm\frac{1}{4}}{2}, & \frac{\nu+\frac{15}{4}-\frac{\mu}{2}\pm\frac{1}{4}}{2} \\ \frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}, & \frac{\nu+\frac{7}{2}-\mu-\gamma}{2}, & \frac{\nu+\frac{9}{2}-\mu-\gamma}{2}\end{matrix}\;;\;\frac{4}{s^2}\right] \qquad (27)$$

provided $\alpha>0$, $\alpha^2>1$, $R\left(\nu-\frac{\mu}{2}\right)>-\frac{5}{2}$, $R(s)>0$, and $|s|>2$.

8. *Theorem*.6.

If

$$t^{\lambda} f(t) \xrightarrow[\pm\frac{1}{4}]{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} \Phi_{n,\lambda}(s), \text{ then}$$

$$\Phi_{n+1,\lambda}(s) = \Phi_{n,\lambda}(s) - \frac{n}{2s}\varphi_{n-1,\,\lambda-1}(s) \tag{28}$$

provided the integrals and the series involved are convergent.

Proof : —

We have

$$\varphi_{n+1,\lambda}(s) = 2^{-\frac{n+1}{2}} s \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st} (st)^{-\frac{1}{2}(n+1)} D_{n+1}(\sqrt{2st})\, f(t)\, dt$$

Using the well known recurrence formula for the parabolic cylinder function viz.,

$$D_{n+1}(z) = z\, D_n(z) - nD_{n-1}(z) \tag{29}$$

we get

$$\Phi_{n+1,\lambda}(s) = \varphi_{n,\lambda}(s) - \frac{n}{2s}\varphi_{n-1,\lambda-1}(s)$$

Example.1.

Let

$$f(t) = J_{\mu,\nu}(3t), \text{ then from (3)}$$

$$\Phi_{n+1,\lambda}(s) = \frac{\Gamma_*\left(\mu+\nu+\lambda+1-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\right)s^{-(\mu+\nu+\lambda)}}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\nu+1)\,\Gamma\left(\mu+\nu+\lambda+1-n-\frac{1}{2}\right)} \times$$

$${}_6F_5\left[\begin{matrix}\frac{\mu+\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}}{3}, & \frac{\mu+\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{7}{4}\pm\frac{1}{4}}{3}, & \frac{\mu+\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{11}{4}\pm\frac{1}{4}}{3} \\ \mu+1,\ \nu+1, & \frac{\mu+\nu+\lambda-n+\frac{1}{2}}{3}, & \frac{\mu+\nu+\lambda-n+\frac{3}{2}}{3}, \quad \frac{\mu+\nu+\lambda-n+\frac{5}{2}}{3}\end{matrix}\ ;-\frac{27}{s^3}\right]$$

provided $R\left(\mu+\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\right)>0$, $R(s)>0$, and $|s|>3$.

Now on applying Theorem.6., we get

$$\left(\mu+\nu+\lambda-n+\frac{1}{2}\right)\times$$

$${}_6F_5\left[\begin{matrix}\frac{\mu+\nu+\lambda+1-\frac{n}{2}\pm\frac{1}{2}}{3}, \frac{\mu+\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}}{3}, \frac{\mu+\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{5}{2}}{3}, \frac{\mu+\nu+\lambda-\frac{n}{2}+3}{3} \\ \mu+1,\ \nu+1, \frac{\mu+\nu+\lambda-n+\frac{1}{2}}{3}, \frac{\mu+\nu+\lambda-n+\frac{3}{2}}{3}, \frac{\mu+\nu+\lambda-n+\frac{5}{2}}{3}\end{matrix};-\frac{27}{s^3}\right]$$

$$\left(\mu+\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\times$$

$${}_5F_5\left[\begin{matrix}\frac{\mu+\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}}{3}, \frac{\mu+\nu+\lambda-\frac{n}{2}+2\pm\frac{1}{2}}{3}, \frac{\mu+\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{15}{4}\pm\frac{3}{4}}{3} \\ \mu+1,\ \nu+1, \frac{\mu+\nu+\lambda-n+2\pm\frac{1}{2}}{3}, \frac{\mu+\nu+\lambda+\frac{7}{2}-n}{3}\end{matrix};-\frac{27}{s^3}\right]$$

$$-{}_6F_5\left[\begin{matrix}\frac{\mu+\nu+\lambda-\frac{n}{2}+1\pm\frac{1}{2}}{3}, \frac{\mu+\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}}{3}, \frac{\mu+\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{11}{4}\pm\frac{1}{4}}{3} \\ \mu+1,\ \nu+1, \frac{\mu+\nu+\lambda-n+2\pm\frac{1}{2}}{3}, \frac{\mu+\nu+\lambda+\frac{7}{2}-n}{3}\end{matrix};-\frac{27}{s^3}\right], \quad (30)$$

provided $R\left(\mu+\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)>0$, $R(s)>0$ and $|s|>3$.

Putting $\mu+\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=3\alpha$, $\quad \mu+\nu+\lambda+\frac{1}{2}-n=3\beta$,

$\mu+1=\gamma$, $\nu+1=\delta$, and $-\frac{27}{s^3}=z$, (30) reduces to

$$\beta\ {}_6F_5\left[\begin{matrix}\alpha, \alpha+\frac{1}{6}, \alpha+\frac{1}{3}, \alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{2}{3}, \alpha+\frac{5}{6} \\ \gamma,\ \delta,\ \beta,\ \beta+\frac{1}{3}, \beta+\frac{2}{3}\end{matrix}; z\right]$$

$$= \alpha\ {}_6F_5\left[\begin{matrix}\alpha+\frac{1}{6}, \alpha+\frac{1}{3}, \alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{2}{3}, \alpha+\frac{5}{6}, \alpha+1 \\ \gamma, \delta,\ \beta+\frac{1}{3}, \beta+\frac{2}{3}, \beta+1\end{matrix}; z\right] \qquad (31)$$

$$+ (\beta-\alpha)\ {}_6F_5\left[\begin{matrix}\alpha, \alpha+\frac{1}{6}, \alpha+\frac{1}{3}, \alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{2}{3}, \alpha+\frac{5}{6} \\ \gamma, \delta,\ \beta+\frac{1}{3}, \beta+\frac{2}{3}, \beta+1\end{matrix}; z\right]$$

Example.2.
Let

$$f(t) = H_\nu(2t), \text{ then from (5)}$$

$$\Phi_{n+1,\lambda}(s) = \frac{\Gamma_*\left(\nu+2+\lambda-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\right) s^{-(\nu+\lambda+1)}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+2+\lambda-n-\frac{1}{2}\right)} \times$$

$${}_5F_4\left[\begin{matrix}1, \frac{\nu+\lambda+2-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}}{2}, \frac{\nu+\lambda+3-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}}{2} \\ \frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \frac{\nu+2+\lambda-n-\frac{1}{2}}{2}, \frac{\nu+3+\lambda-n-\frac{1}{2}}{2}\end{matrix}; -\frac{4}{s^2}\right],$$

provided $R\left(\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right) > 0$, $R(s) > 0$, and $|s| > 2$.

Theorem.6. now gives

$$\left(\nu+\lambda-n+\frac{3}{2}\right) {}_5F_4\left[\begin{matrix}1, \frac{\nu+\lambda+2-\frac{n}{2}\pm\frac{1}{2}}{2}, \frac{\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}}{2} \\ \frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \frac{\nu+\lambda-n+2\pm\frac{1}{2}}{2}\end{matrix}; -\frac{4}{s^2}\right]$$

$$= \left(\nu+\lambda-n+\frac{3}{2}\right) {}_5F_4\left[\begin{matrix} 1, \dfrac{\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}}{2}, \dfrac{\nu+\lambda-\frac{n}{2}+3\pm\frac{1}{2}}{2} \\ \frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \dfrac{\nu+\lambda-n+3\pm\frac{1}{2}}{2} \end{matrix}; -\frac{4}{s^2}\right]$$

$$-\frac{n}{2} {}_5F_4\left[\begin{matrix} 1, \dfrac{\nu+\lambda-\frac{n}{2}+2\pm\frac{1}{2}}{2}, \dfrac{\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}}{2} \\ \frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \dfrac{\nu+\lambda-n+3\pm\frac{1}{2}}{2} \end{matrix}; -\frac{4}{s^2}\right], \qquad (32)$$

provided $R\left(\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)>0$, $R(s)>0$, and $|s|>2$.

On putting $\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}=2\alpha$, $\nu+\lambda-n+\frac{3}{2}=2\beta$, $\nu+\frac{3}{2}=\gamma$, and $z=-\frac{4}{s^2}$, (32) reduces to a recurrence relation for the function ${}_5F_4$, which is

$${}_5F_4\left[\begin{matrix} 1, \alpha, \alpha+\frac{1}{4}, \alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2}, \gamma, \beta, \beta+\frac{1}{2} \end{matrix}; z\right] = \alpha\, {}_5F_4\left[\begin{matrix} 1, \alpha+\frac{1}{4}, \alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{3}{4}, \alpha+1 \\ \frac{3}{2}, \gamma, \beta+\frac{1}{2}, \beta+1 \end{matrix}; z\right]$$

$$-(\alpha-\beta)\, {}_5F_4\left[\begin{matrix} 1, \alpha, \alpha+\frac{1}{4}, \alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2}, \gamma, \beta+\frac{1}{2}, \beta+1 \end{matrix}; z\right] \qquad (33)$$

9. *Theorem* 7.

If

$$t^\lambda f(t) \xrightarrow[\pm\frac{1}{4}]{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} \Phi_{n,\lambda}(s), \text{ and}$$

$\Phi'_{n,\lambda}(s)$ is the image of $t^{\lambda} f(t)$ with respect to the kernel $D'_n \sqrt{2st}$ defined by the relation

$$\Phi'_{n,\lambda}(s) = s \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st} 2^{-\frac{n}{2}} (st)^{-\frac{n}{2}} D'_n(\sqrt{2st})\, t^{\lambda} f(t)\, dt, \qquad (34)$$

then

$$\Phi'_{n,\lambda}(s) = \sqrt{\frac{s}{2}}\, \Phi_{n,\lambda+\frac{1}{2}}(s) - \sqrt{2s}\, \Phi_{n+1,\lambda+\frac{1}{2}}(s), \qquad (35)$$

provided the integrals involved are convergent.

Proof : —

We have

$$\Phi_{n,\lambda}(s) = s \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st} 2^{-\frac{n}{2}} (st)^{-\frac{n}{2}} D_n(\sqrt{2st})\, t^{\lambda} f(t)\, dt,$$

and

$$\Phi'_{n,\lambda}(s) = s \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st} 2^{-\frac{n}{2}} (st)^{-\frac{n}{2}} D'_n(\sqrt{2st})\, t^{\lambda} f(t)\, dt .$$

Now using the well known recurrence formula

$$D'_n(z) = \frac{1}{2} z\, D_n(z) - D_{n+1}(z), \qquad (36)$$

we get

$$\Phi'_{n,\lambda}(s) = \sqrt{\frac{s}{2}}\, \Phi_{n,\lambda+\frac{1}{2}}(s) - \sqrt{2s}\, \Phi_{n+1,\lambda+\frac{1}{2}}(s)$$

Example : —

Let

$$f(t) = J_{\nu}(at), \text{ then [2, p. 389.]}$$

$$\Phi'_{n,\lambda}(s) = s \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st}\, 2^{-\frac{n}{2}} (st)^{-\frac{n}{2}} D'_n(\sqrt{2st})\, t^{\lambda} J_{\nu}(at)\, dt,$$

applying Theorem.7., we obtain

$$\Phi'_{n,\lambda}(s) = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\nu} \Gamma\left(\nu+\lambda-\frac{n}{2}+1\right) \Gamma\left(\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{2}\, s^{\nu+\lambda}\, \Gamma(\nu+1)\, \Gamma(\lambda+\nu+1-n)} \times$$

$$\left\{\frac{\lambda+\nu-\frac{n}{2}+1}{\lambda+\nu-n+1}\cdot {}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{\lambda+\nu-\frac{n}{2}+2\pm\frac{1}{2}}{2}, & \frac{\lambda+\nu-\frac{n}{2}+\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}}{2} \\ \nu+1, & \frac{\lambda+\nu-n+\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}}{2}\end{matrix};-\frac{a^2}{s^2}\right]\right.$$

$$\left.-2\ {}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{\nu+\lambda-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}}{2}, & \frac{\lambda+\nu-\frac{n}{2}+2\pm\frac{1}{2}}{2} \\ \nu+1, & \frac{\lambda+\nu-n+\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}}{2}\end{matrix};-\frac{a^2}{s^2}\right]\right\} \quad (37)$$

provided $R\left(\lambda+\nu-\frac{n}{2}\right)>0$, $R(s+a)>0$, and $|s|>|a|$.

10. *Theorem* .8.

If

$$t^{-n+\frac{1}{2}}\ f(t) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \Phi_n(s), \text{ and}$$

$$\psi(x) \overset{\cdot}{=\!=} e^{-\frac{1}{2}st}\ t^{-(n+k)}\ W_{k+\frac{1}{2},m}(st)\ f(t), \text{ then} \quad (38)$$

$$\Phi_{n+l,\,s} = \frac{s^{-k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(l)}\int_0^\infty x^{l-2}\,\psi(x)dx,$$

provided

(1) $R\left(\mu+\frac{3}{2}-n-l-k\pm m\right)>0$, where $f(t)=0\ (t^\mu)$ for small t,

(2) $R(l)>0$, and the integrals involved are absolutely convergent.

Proof : —

We have

$$\Phi_{n+l}(s) = s\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st}\ (st)^{-k-\frac{1}{2}}\ W_{k+\frac{1}{2},m}(st)\ ^{-n-l+\frac{1}{2}}f(t)\,dt, \quad (39)$$

and

$$\psi(x) = x \int_0^\infty e^{-lx}\, e^{-\frac{1}{2}st}\, t^{-(n+\kappa)}\, W_{\kappa+\frac{1}{2},m}\,(st)\, f(t)\, dt. \qquad (40)$$

Also we know that

$$t^{-l} = \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^\infty e^{-tx}\, x^{l-1}\, dx,\ \mathrm{R}(l) > 0 \text{ and } t > 0 \qquad (41)$$

Substituting for t^{-l} from (41) in (39) and evaluating the integral with the help of (40), we get

$$\Phi_{n+l}(s) = \frac{s^{-k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(l)} \int_0^\infty x^{l-2}\, \psi(x)\, dx.$$

11. *Corollary* : —

When $k = m$, the Theorem 8. reduces to [5]

If

$$\Phi_n(s) \doteqdot t^{-n+\frac{1}{2}}\, f(t),$$

where $f(t)$ is not a function of n, and $\mathrm{R}(n) > 0$, then

$$\Phi_{n+l}(s) = \frac{s}{\Gamma(l)} \int_0^\infty \frac{t^{l-1}}{(t+s)}\, \Phi_n(s+t)\, dt,$$

provided $\mathrm{R}(s) > 0$, $\mathrm{R}(l) > 0$, and the integral converges.

Example : —

Let

$$f(t) = t^\lambda, \text{ then}$$

$$\Phi_{n+l}(s) = \frac{s^{l+n-\lambda-\frac{1}{2}}\, \Gamma_*\left(\lambda - n - l - k + \frac{3}{2} \pm m\right)}{\Gamma\left(\lambda - n - l - 2k + \frac{3}{2}\right)},$$

and [4, pp. 51]

$$\psi(x) = \frac{(-)^{n+2k-\frac{1}{2}-\lambda}\, \Gamma_*(k+1\pm m)\, x^{2k+n+\frac{1}{2}-\lambda}}{\Gamma\left(2k+\frac{1}{2}+n-\lambda\right)\, s^{-k-\frac{1}{2}}}\, {}_2F_1\left[\begin{matrix} k+1\pm m \\ 2k+n+\frac{1}{2}-\lambda \end{matrix}; -\frac{x}{s}\right.$$

provided $\mathrm{R}\left(\lambda - n - l - k + \frac{3}{2} \pm m\right) > 0$, and $\mathrm{R}(s) > 0$.

Applying Theorem.8., we get

$$\int_0^\infty x^{2k+n+l-\lambda-\frac{3}{2}} \; {}_2F_1\left[\begin{matrix} k+1\pm m \\ 2k+n+\frac{1}{2}-\lambda \end{matrix}; -\frac{x}{s}\right] dx$$

$$= \frac{(-)^{2k+n-\lambda-\frac{1}{2}} s^{n+l-\lambda+\frac{1}{2}} \Gamma_*\left(n-l+\frac{3}{2}-n-k\pm m\right) \Gamma(l) \Gamma\left(2k+n-\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda-l-n-2k+\frac{3}{2}\right) \Gamma_*(k+1\pm m)}, \quad (42)$$

provided $R\left(\lambda-l-n-k+\frac{3}{2}\pm m\right)>0$, $R\left(2k+n+l-\lambda-\frac{1}{2}\right)>0$, $R(l)>0$, and $R(s)>0$.

I am thankful to Dr. S.K. Bose of the Lucknow University for his help in the preparation of this paper.

REFERENCES

[1] Goldstein, S., — *Proc. of the London Math. Soc.*, (1932), **34**, pp. 103-125.
[2] Jaiswal, J. P., — *Mathematische Zeitschrift*, **55** (1952) p. 385-98.
[3] Meijer, C. S., — *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, (1941), **44**, pp. 727-737.
[4] McLachlan, N. W. and Humbert, P., — Formulaire pour le Calcul Symbolique (1941).
[5] Tewari, N. D., — *Proc. Benares Mathematical Society*, **5** (1943), pp. 33.
[6] Varma, R. S. — Thesis on « Parabolic Cylinder Functions » for the D. Sc. degree of the University of Allahabad (INDIA) (1938).

Department of Mathematics and Statistics
University of Lucknow,
Lucknow (India).

Sciences Physiques et Chimiques

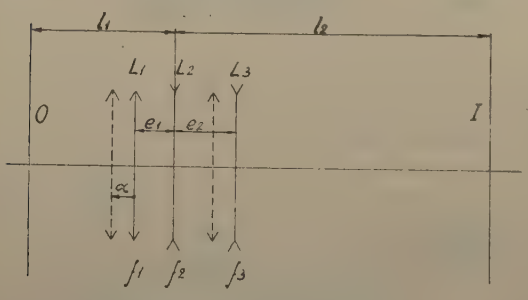
Sur certains systèmes pancratiques non symétriques à trois lentilles

NOTE DE

A. BIOT

RÉSUMÉ. On considère un système formé de deux lentilles positives différentes encadrant une lentille négative et destiné à donner une image d'un plan objet donné, fixe et perpendiculaire à l'axe optique du système. On suppose que les lentilles positives peuvent se déplacer en bloc par rapport à la lentille négative fixe. Dans le but de pouvoir utiliser un tel système comme système pancratique, on recherche la position de l'image du plan objet donné en fonction du déplacement des lentilles positives.

1. LE PROBLÈME. — Considérons (fig. 1) un système optique formé de deux lentilles positives L_1 et L_3 de distances focales différentes f_1 et f_3, encadrant une lentille négative L_2 de distance focale f_2 dont elles sont séparées de distances e_1 et e_2. Soit de plus, un plan objet O perpendiculaire à l'axe optique du système qui en donne une image I. Supposons d'abord que les plans O et I soient respectivement conjugués aux plans antiprincipaux de la lentille négative. Le plan O et la lentille négative restant fixes on déplace alors en bloc les lentilles positives d'une longueur α parallèlement à l'axe optique. Il s'agit de déterminer



la nouvelle position de l'image I par rapport à la lentille négative. La discussion des résultats indiquera quand le plan I pourra être, pratiquement, considéré comme étant immobile.

Nous avons précédemment (*Ann. Soc. Sc. Brux.*, 64, 1951, 116-124) étudié le même problème en supposant $f_1 = f_3$ et discuté les formules obtenues. Celles que nous allons obtenir sont notablement plus compliquées que les précédentes et se prêtent difficilement à une discussion générale. Dans ce cas comme dans le précédent les lentilles sont supposées minces.

2. Appelons p_{10}, p'_{10}; p_{30}, p'_{30} les distances, sur l'axe, des points objet et image relativement aux lentilles L_1 et L_3 respectivement, quand $\alpha = 0$. On a, par la condition de correspondance exprimée en 1 ci-dessus

$$p_{10} = -(l_1 - e_1) \qquad p_{30} = 2f_2 - e_2$$

$$p'_{10} = e_1 - 2f_2 \qquad p'_{30} = l_2 - e_2 ,$$

d'où, par application de la formule des lentilles,

$$f_1 = \frac{(l_1 - e_1)(e_1 - 2f_2)}{l_1 - 2f_2} \qquad f_3 = \frac{(l_2 - e_2)(e_2 - 2f_2)}{l_2 - 2f_2} \tag{1}$$

3. Soient p_1, p'_1; p_2, p'_2; p_3, p'_3, respectivement, les distances des points objets et images pour chacune des lentilles quand α est quelconque.

On trouve successivement, par la formule des lentilles et en se servant de (1)

$$p_1 = -l_1 + e_1 + \alpha$$

$$p'_1 = \frac{-(l_1 - e_1)^2 (e_1 - 2f_2) + \alpha(l_1 - e_1)(e_1 - 2f_2)}{-(l_1 - e_1)^2 + \alpha(l_1 - 2f_2)}$$

$$p_2 = \frac{2(l_1 - e_1)^2 f_2 - \alpha^2 (l_1 - 2f_2) + \alpha(l_1 - 2f_2)(l_1 - 2e_1)}{-(l_1 - e_1)^2 + \alpha(l_1 - 2f_2)}$$

$$p'_2 = \frac{2(l_1 - e_1)^2 f_2^2 - \alpha^2 (l_1 - 2f_2) f_2 + \alpha(l_1 - 2f_2)(l_1 - 2e_1) f_2}{(l_1 - e_1)^2 f_2 - \alpha^2 (l_1 - 2f_2) + \alpha(l_1 - 2f_2)(l_1 + f_2 - 2e_1)}$$

$$p_3 = \frac{(l_1-e_1)^2 f_2(2f_2-e_2)-\alpha^3(l_1-2f_2)+\alpha^2 (l_1-2f_2) (l_1+e_2-2e_1)+\alpha[(l_1-e_1)^2 f_2+(l_1-2f_2) (l_1f_2-2e_1f_2-l_1e_2-f_2e_2+2e_1e_2)]}{(l_1-e_1)^2 f_2-\alpha^2 (l_1-2f_2)+\alpha (l_1-2f_2) (l_1+2f_2-2e_1)}$$

$p'_3 = \frac{N}{D}$, avec

$$\begin{aligned}
N = {} & (l_1-e_1)^2 f_2 (2f_2-e_2) (l_2-e_2) (e_2-2f_2) - \alpha^3 (l_1-2f_2) (l_2-e_2) (e_2-2f_2) \\
& + \alpha^2 (l_1-2f_2) (l_1+e_2-2e_1) (l_2-e_2) (e_2-2f_2) \\
& + \alpha (l_2-e_2) (e_2-2f_2) [(l_1-e_1)^2 f_2 + (l_1-2f_2) (l_1f_2-2e_1f_2-l_1e_2-f_2e_2+2e_1e_2)] \\
D = {} & -(l_1-e_1)^2 (2f_2-e_2)^2 f_2 - \alpha^3 (l_1-2f_2) (l_2-2f_2) \\
& + \alpha^2 [(l_1-2f_2) (l_2-2f_2) (l_1-l_2+2e_2-2e_1) + (l_1-2f_2) (l_2-e_2)^2] \\
& + \alpha [(l_1-e_1)^2 (l_2-2f_2) f_2 + (l_1-2f_2) (l_2-2f_2) (l_1-2e_1) (f_2-e_2) - (l_1-2f_2) (l_2-2f_2) e_2f_2 \\
& \qquad + (l_2-e_2) (e_2-2f_2) (l_1-2f_2) (l_1+f_2-2e_1)]
\end{aligned}$$

4. On tire, de ces expressions, la valeur cherchée de

$$\begin{aligned}
p'_3 + e_2 - \alpha = l_2 + \frac{1}{D} \Big\{ & \alpha^4 (l_1-2f_2) (l_2-2f_2) - \alpha^3 (l_1-2f_2) (l_2-2f_2) (l_1-l_2+2e_2-2e_1) \\
& - \alpha^2 [(l_1-e_1)^2 (l_2-2f_2) f_2 + (l_1-2f_2) (l_2-e_2)^2 f_2 + (l_1-2f_2) (l_2-2f_2) (l_1-2e_1) (l_2-2e_2) \\
& \qquad + f_2 (l_1-2f_2) (l_2-2f_2) (l_1+l_2-2e_2-2e_1)] \\
& + \alpha f_2 [(l_2-e_2)^2 (l_1-2f_2) (l_1-2e_1+2f_2) - (l_1-e_1)^2 (l_2-2f_2) (l_2-2e_2+2f_2)] \Big\} \qquad (2)
\end{aligned}$$

On voit que, dans le cas général,

$$p'_3 + e_2 - \alpha = l_2 + \alpha\varphi\,(\alpha)$$

et que le dernier terme change de signe avec α, dans le cas général, à moins que l'on n'annule le coefficient de α dans l'expression (2) par un choix convenable des l_1, l_2, e_1, e_2 et f_2.

Construction d'un spectrographe de masse du type Mattauch à grand pouvoir de résolution

PAR

J.M. DELFOSSE et M. NEVE de MEVERGNIE

RESUME. Un spectrographe de masse à double focalisation, a été construit et mis au point. Les premières mesures indiquent un pouvoir de résolution de 12.000.

La détermination des masses des isotopes étant capitale dans l'étude des forces nucléaires, les spectrographes de masse à grand pouvoir de résolution occupent une place importante parmi les instruments de la physique du noyau. Nous avons construit et mis au point un spectrographe à double focalisation du même type que celui proposé et construit par J. Mattauch (1).

Nous rappelons brièvement l'optique de cet appareil (fig. 1). Les ions produits dans le volume V émergent par une fente s_1 et pénètrent entre deux surfaces cylindriques coaxiales entre lesquelles est appliquée une différence de potentiel. La fente s_1 étant placée au foyer de cette lentille électrique, les trajectoires des ions de même énergie cinétique forment à la sortie de la lentille des faisceaux de droites parallèles, de directions variables suivant l'énergie. Les ions de masse m entrant sous l'angle $\pi/2 - \alpha$ par la fente s_2 ont la même quantité de mouvement, et convergent en S. Les quantités de mouvement étant variables avec l'angle α, il est possible de choisir les constantes géométriques de l'appareil pour que le déplacement du point S résultant de la variation de l'angle α soit exactement compensé par la variation correspondante du rayon de courbure.

Herzog (2) a étudié systématiquement les propriétés des lentilles électriques cylindriques et des lentilles magnétiques à champ constant. Les calculs montrent qu'un grand nombre de possibilités sont offertes pour réaliser la combinaison exigée plus haut. J. Mattauch

a retenu la disposition indiquée à la figure 1. L'angle Φ, la distance l et le rayon de courbure a y sont liés par les relations :

$$\Phi = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} ; \qquad l = \frac{a}{\sqrt{2}} .$$

Le lieu des images de la source s_1 correspondant à des masses différentes, est une droite passant par M et faisant une angle de 45° avec la direction moyenne des particules incidentes.

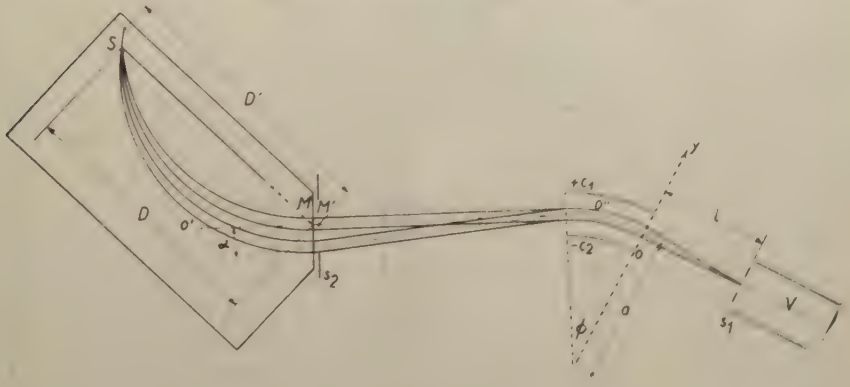


FIG. 1

De plus les rayons des trajectoires décrites par des particules étant proportionnelles à leur quantité de mouvement, la distance SM de l'image au bord de l'entrefer vaut :

$$SM = \sqrt{2}\,\frac{cmv}{eH} = \frac{2c}{H}\sqrt{\frac{V}{e}}\,\sqrt{m} = k\sqrt{m}$$

où eV représente l'énergie cinétique des ions qui décrivent les trajectoires $\alpha = 0$.

L'échelle est donc linéaire par rapport à la racine carrée des masses, et la connaissance des masses correspondant à deux images distinctes permet de déterminer en principe la masse correspondant à n'importe quelle autre.

Enfin le pouvoir de résolution s'exprime par la relation : $P = \frac{a}{2s_1}$,

où a représente le rayon de courbure moyen de la lentille électrique, et s_1, la largeur de la fente délimitant le faisceau d'ions.

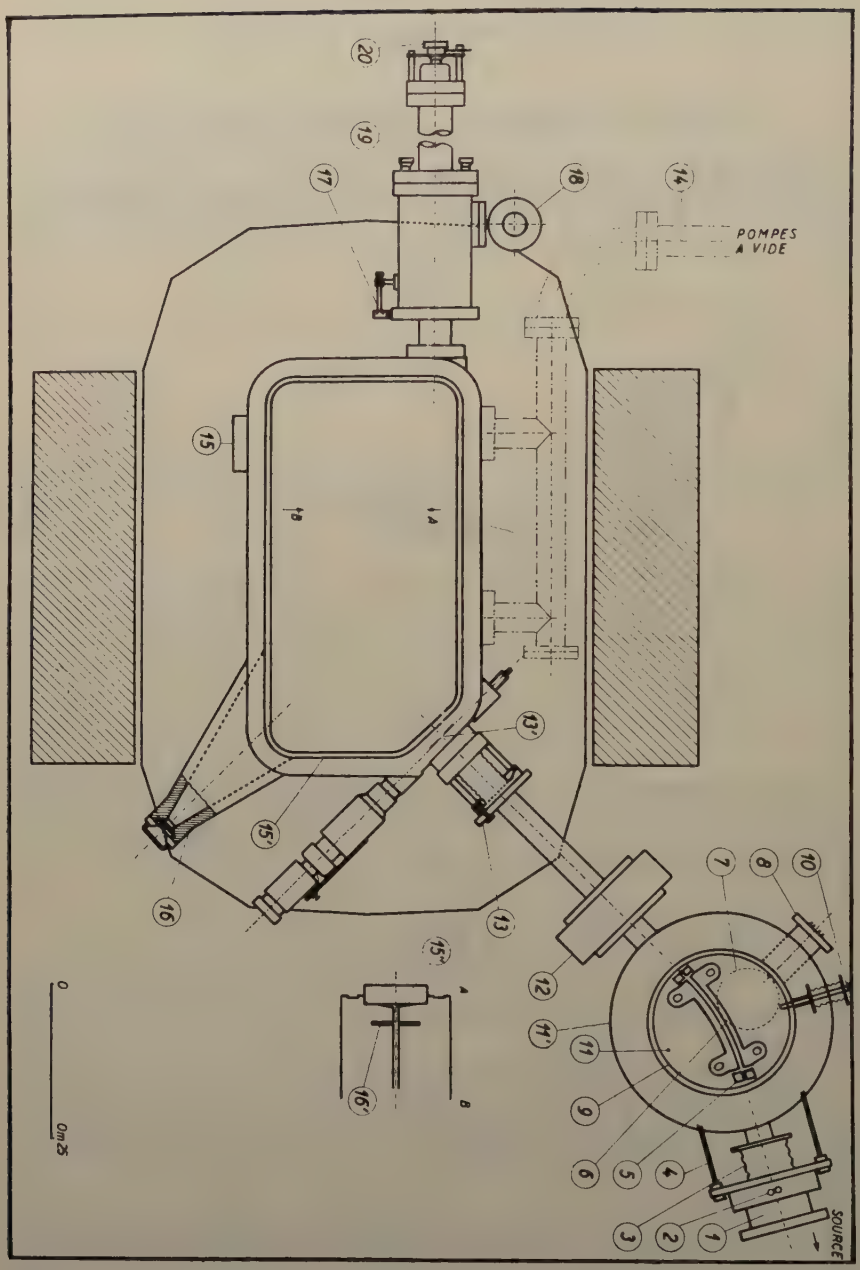


FIG. 2

Dans la construction de notre spectrographe, nous nous sommes inspirés de la réalisation récente d'Ewald ([3]). La figure 2 représente schématiquement une section de l'appareil par un plan médian.

La source d'ions n'est pas représentée sur la figure; en fait, des types de sources différents peuvent être adaptés au manchon cylindrique 1 suivant le genre de problème à étudier. Nous avons utilisé pour la mise au point une source à filament émetteur d'ions potassium, et une source à décharge avec post-accélération. La fente d'entrée 2 est construite suivant la méthode préconisée par Ewald. Elle est constituée par deux cylindres dressés au micron, le diamètre de l'un d'entre eux étant réduit de 0,02 mm sur une partie de sa longueur. En contact suivant une de leurs génératrices, ces cylindres définissent une fente de 0,01 mm. Ce système a l'avantage de présenter au faisceau une fente propre par simple rotation des deux cylindres. Trois mouvements non représentés sur la figure, permettent respectivement d'incliner la fente dans un plan normal à la direction du faisceau, de l'élargir, et d'imprimer aux cylindres un mouvement de rotation. Ces mouvements sont commandés de l'extérieur grâce à des joints rodés et des connexions à la cardan.

Le manchon 2 s'adapte sur une plaque dont on peut régler la position et l'inclinaison au cours des essais d'alignement grâce au tube flexible 3 et aux quatre tiges 4.

La lentille électrique est constituée de deux pièces en laiton de rayons 276 et 284 mm; elles sont fixées sur un disque de pyrex 9, et quatre blocs en matière isolante règlent leur distance mutuelle. Quatre blocs en laiton de section carrée 5 corrigent le champ électrique de fuite. Leur distance aux faces d'entrée et de sortie de la lentille a été calculée de telle sorte que l'ensemble soit équivalent à un condensateur électrique, sans champ de fuite, d'angle au centre $\Phi = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$; Herzog ([4]).

Les quatre blocs sont reliés électriquement à des bornes 8 accessibles de l'extérieur. En fonctionnement normal, les quatre blocs sont mis au sol, mais il est possible de suivre le trajet du faisceau en mesurant le courant d'ions sur ces blocs. Le disque de pyrex peut se déplacer dans un plan horizontal parallèle à la direction OY (fig. 1) grâce à un guide, une vis micrométrique et un tube flexible 10. De plus, il repose sur l'extrémité d'une tige verticale 11 dont la hauteur peut être réglée de l'extérieur, ce qui permet d'assurer la perpendicularité des champs électrique et magnétique. L'ensemble est placé

dans une boîte cylindrique 11′ fermée par deux couvercles. Le couvercle inférieur supporte une pompe à diffusion d'huile 7. La boîte cylindrique est raccordée à la boîte 15′ par un tube métallique flexible 13, et le chariot sur lequel elle repose permet de la faire pivoter dans tous les sens sur une surface rodée sphérique solidaire de la boîte 15′.

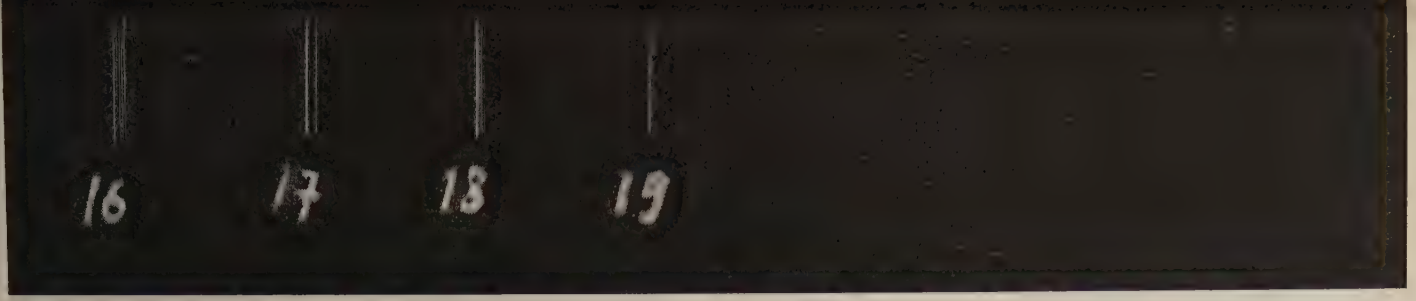
La position et la largeur de la fente d'entrée dans le champ magnétique est réglable de l'extérieur, la fente est isolée grâce à un manchon de polystyrène, de sorte que le courant d'ions qu'elle intercepte peut être décelé. Il est généralement de l'ordre de 10^{-11} à 10^{-12} ampère.

La boîte 15′ est constituée par un cadre en cuivre dur 15″ fermé par deux plaques d'acier armco dressés et polis sur leurs faces intérieures. Ces deux plaques portent chacune une rainure dans laquelle vient se loger le châssis de la plaque photographique. L'introduction du châssis dans la boîte peut s'effectuer sans rompre le vide, grâce à un dispositif d'écluse 17, 18.

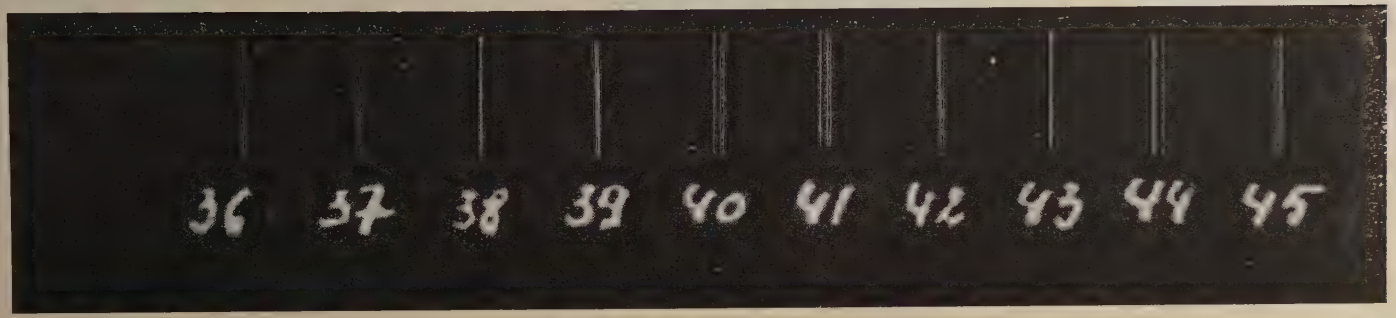
Une commande 20 assure un mouvement vertical au châssis dans la rainure et permet la prise de six photos. L'image d'une fente lumineuse placée en 15 permet de repérer la plaque par rapport au point H (fig. 1). Ce point H se trouve à l'intersection du prolongement de la pellicule sensible et de l'axe 0′0″ du faisceau. Il serait situé sur le bord de l'entrefer si il n'y avait pas de champ de fuite. Celui-ci le reporte en fait en M′, d'une distance d en avant du bord, ce qui a pour conséquence de placer le lieu des foyers en arrière de la plaque photographique. Nous avons déterminé cette distance $d = \dfrac{D'_1 - D_1}{2}$, de la manière suivante :

D'_1 est tiré de la formule $D'_1 = \dfrac{D'_2 - D'_1}{\sqrt{m_1} - \sqrt{m_1}} \sqrt{m_1}$ où $D'_2 - D'_1$ est égale à la distance qui sépare sur la plaque photographique les images de m_1 et m_2.

D_1 est la distance au bord de l'entrefer de la raie correspondant à la masse m_1. Pour ramener d à zéro, une barre d'acier de section circulaire et percée suivant son axe d'un trou de section rectangulaire est placée sur le trajet du faisceau. La distance de la barre à l'entrefer est modifiée jusqu'à ce qu'on obtienne pour d une valeur négligeable. L'enceinte entière est maintenue à une pression inférieure à 10^{-5} mm de mercure grâce à trois pompes à diffusion d'huile, d'un débit total de 250 litres, par seconde. Une des pompes formant corps avec la source n'est pas représentée sur la figure.


16
17
18
19

24
25
26
27
28
29
30
31
32
33


36
37
38
39
40
41
42
43
44
45

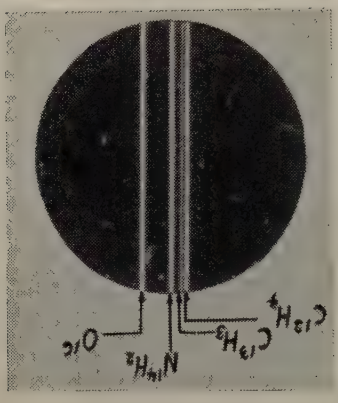


Planche II

La planche I est une reproduction du spectre d'un mélange d'alcool méthylique et éthylique. Le courant de décharge dans la vapeur d'alcool est de l'ordre de 300 microampère, sous 10.000 volts. Les rayons canaux subissent à la sortie du tube à décharge une post-accélération de 15 000 volts. Un grand nombre de raies présente une structure fine, une raie complexe est reproduite à la planche II. Les groupements NH_2^+ et CH_4^+ proviennent d'impuretés. Des premières mesures permettent d'évaluer à 12 000 le pouvoir de résolution de l'appareil. Nous comptons le porter à 24.000 en diminuant de moitié la largeur de la fente.

REFERENCES

(1) J. Mattauch und R. Herzog, *Z. Physik*, 89, 786, 1934.
(2) R. Herzog, *Z. Physik*, 89, 447, 1934.
(3) H. Ewald, *Z. Naturforschung*, 1, 131, 1946.
(4) R. Herzog, *Z. Physik*, 596.

Note sur le tracé des courbes *f* et des courbes CT en élasticité

PAR

A. PIRARD

Chargé de Cours à l'Université de Liège

Dans le numéro d'octobre 1952 de la *Revue des Questions scientifiques*, nous avons présenté et défini les courbes d'inflexion des isostatiques, dites courbes *f*, et les courbes CT séparant, dans les états plans de tension, les régions où une tension principale est positive de celles où elle est négative. Nous exposerons ici toute une série de propriétés de ces courbes, propriétés destinées à en permettre un tracé complet dans un problème quelconque à partir des expériences photoélastiques.

I. — Les courbes d'inflexion des isostatiques

Le lieu géométrique des points d'inflexion des isostatiques s_1 d'un réseau est une courbe continue notée f_1 et celui des points d'inflexion des s_2 est une autre courbe f_2.

Ainsi que nous l'avons dit, dans les régions faciles ces courbes seront mises en place par pointage séparé sur le réseau des isostatiques des points d'inflexion manifestes et, sur le réseau des isoclines, des points de tangence avec une isocline n° des branches correspondantes de la croix des tensions. Il sera bon, dans tout le travail, d'utiliser une couleur différente pour distinguer les f_1 des f_2.

Dans les régions plus délicates et dans l'analyse d'ensemble de la situation qui doit être continue, on se servira des considérations suivantes :

1. En chaque point singulier attractif, le plus fréquemment point IA_1 à une asymptote, on tracera les tangentes de départ des courbes *f*. Il s'agit de deux lignes dans le prolongement l'une de l'autre, ayant au point singulier la direction des isostatiques limites s_1 et s_2. Les deux traits (de couleurs différentes) seront f_1 sur s_1 et f_2 sur s_2.

2. En chaque point singulier répulsif, point usuel IR, il y a trois arrivées de f_1 tangentes aux s_1 limites et se continuant par des f_2. On tracera en couleurs appropriées les six départs alternés en se basant sur les isostatiques limites.

Il y a donc changement d'espèce des courbes f en ces points singuliers du premier ordre.

3. Les considérations du point 2 ci-dessus sont valables aux demi-points IR en bordure de la pièce. On aura donc toujours en ces points une courbe f tangente au contour, réelle si celui-ci est concave, virtuelle, c'est-à-dire hors modèle, s'il est convexe. Il y a toujours en ces points deux départs vers l'intérieur de la pièce. La courbe f tangente au contour concave change évidemment d'espèce au point singulier, f_1 étant sur s_1 et inversement.

4. On recherchera les points d'inflexion éventuels du contour, ces points sont des points d'aboutissement au bord d'une f_1 si le bord est une s_1 et inversement. On notera qu'en ces points l'allure des isoclines et des isochromes est bien caractéristique; les réseaux s'y présentent comme indiqué figure 1, *a* et *b*. En ces points, la courbe f est normale au bord; cette propriété sera démontrée au paragraphe suivant sous le n° 2.

5. Une courbe f_2 peut déboucher sur un contour s_1 — ou inversement — De tels débouchés sont facilement repérables à priori, en effet, la tension de corde σ_1 doit en ces points traverser f_2 et passer par un maximum ou un minimum analytique et l'on sait que les isoclines y sont perpendiculaires au bord et que les isochromes entourent ces points de valeur extrême. La situation est donc repérable dans les deux réseaux expérimentaux. Elle se présente d'ordinaire avec présence, dans le voisinage immédiat, d'un croisement limite d'isoclines ou d'un point singulier, figure 1, *c*, *d* ou 1 *e*, *f*.

6. Croisements de courbes f d'espèces différentes, points doubles d'inflexion. Ces points sont de deux catégories qui se repèrent dans le réseau des isoclines.

a) croisement d'isoclines limites. Tout croisement d'isoclines limites est un point double d'inflexion où se coupent les courbes f_1 et f_2. En ces points, l'isocline limite peut être assimilée à une hyperbole dégénérée en ses asymptotes; on peut facilement, dans le reséau des isoclines, tracer les tangentes aux deux branches de l'isocline limite au point en question. Ces tangentes sont les asymptotes signa-

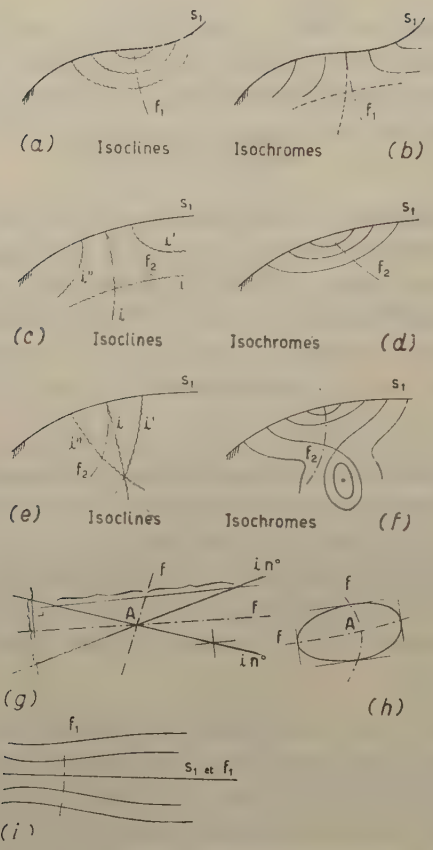


FIG. 1.

lées, elles ne sont pas usuellement perpendiculaires sauf sur un axe de symétrie. Ceci fait, les tangentes aux courbes f à leur point de croisement s'obtiennent d'une manière très approximative en joignant au point les milieux des segments déterminés par ces asymptotes sur des droites respectivement parallèles aux branches de la croix des tensions de l'isocline limite, figure 1*g*.

b) isocline limite résorbée en un point. Lorsque le réseau des isoclines présente des courbes fermées disposées en anneaux se résorbant en un point, ce point du réseau qui possède une cote n relevable, est toujours un point double d'inflexion où se coupent une f_1 et une f_2. On pourra tracer facilement les positions de f_1 et f_2 en un tel point en considérant une isocline fermée de cote voisine de n

et dont l'allure est celle d'un petit anneau de forme encore estimable et de cote connue. Il suffit de repérer ses points de tangence avec les branches de la croix des tensions le concernant. On joindra deux points opposés en passant librement par le point limite central, figure 1*h*; les deux branches f_1 et f_2 se distinguent facilement.

7. Croisement de courbes f de même espèce. Un tel croisement prend toujours l'allure d'un croisement limite, analogue à la dégénérescence d'une hyperbole en ses asymptotes. Il se présente notamment sur un axe de symétrie qui est à la fois isostatique et courbe f; l'allure de la situation est donnée figure 1*i*. Une telle situation se présente toujours une fois sur un axe de symétrie, entre un bord convexe, ou rectiligne et un point de croisement limite d'isoclines s'il n'y a pas de point singulier sur cette portion d'axe.

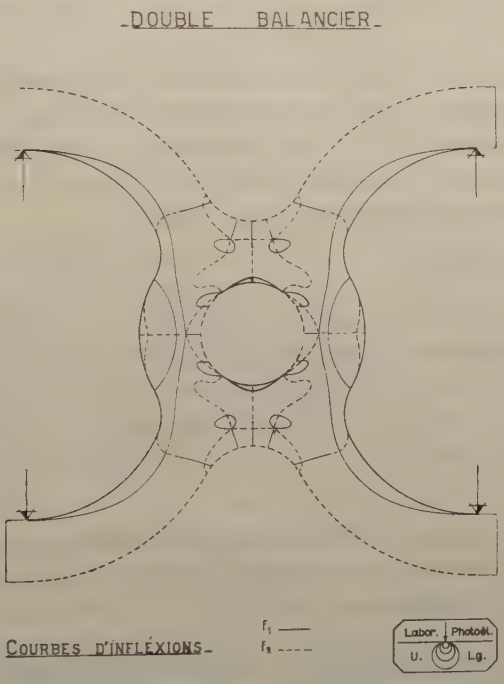


FIG. 2. — Courbes d'inflexion des isostatiques dans le balancier.

La mise en place de tous les départs obligés qui viennent d'être indiqués, jointe au tracé des courbes f dans les régions faciles permet toujours de tracer très correctement la totalité des courbes qui peuvent être assez complexes, comme on peut le voir sur la figure 2

qui montre les courbes d'inflexion des isostatiques dans une pièce de machine en forme de double balancier.

II. — Les courbes CT et leurs propriétés

En chaque point d'un état plan de tension existent deux contraintes principales σ_1 et σ_2 distinguées par le fait que l'on a toujours $\sigma_1 > \sigma_2$, les tractions étant considérées comme positives.

Dans certaines régions du plan, les deux contraintes principales sont toutes deux des tractions; désignons ces régions par TT. Ailleurs, les deux contraintes peuvent être deux compressions, régions CC. Ailleurs encore, une des contraintes, nécessairement σ_1, est une traction et l'autre une compression, régions CT. En vertu de la continuité, ces régions différentes sont limitées par des courbes continues dites courbes CT.

Sur une courbe CT, une des contraintes principales est nulle puisqu'elle est négative d'un côté et positive de l'autre; on pourra donc distinguer les courbes CT_1 sur lesquelles $\sigma_1 = 0$, des courbes CT_2 sur lesquelles $\sigma_2 = 0$. L'équation totale de ces courbes sera $\sigma_1 . \sigma_2 = 0$ ou, en coordonnées cartésiennes ou polaires

$$\sigma_x \sigma_y = \tau^2 \qquad\qquad \sigma_r \sigma_t = \tau^2$$

L'allure des courbes CT peut d'ordinaire être fournie assez exactement à partir des observations photoélastiques en s'aidant des quelques propriétés qui suivent. Dans ce domaine, le tracé des courbes CT à partir de leur équation dans les diverses situations dont on connaît la fonction d'Airy constitue évidemment un enseignement précieux.

1.— Tout bord libre de charge est une courbe CT puisque la tension normale au contour est principale et nulle. Un bord libre s_1 est une courbe CT_2 et inversément.

2.— En un point d'inflexion d'un bord libre de charge et de point singulier aboutit une courbe CT perpendiculaire au bord.

Le fait qu'une courbe CT différente du bord y aboutit est évident. En effet, supposons que le bord soit une s_1; d'un côté du point d'inflexion I le bord est concave et de l'autre, il est convexe. On sait qu'en pénétrant dans le modèle par un bord concave, on se trouve dans une région où les deux contraintes principales ont le même

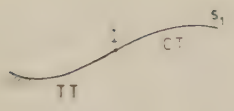


FIG. 3

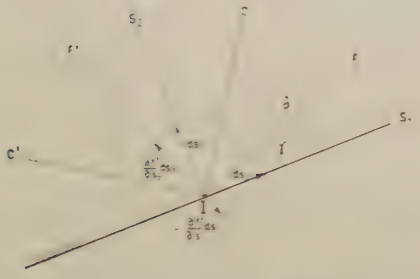


FIG. 4.

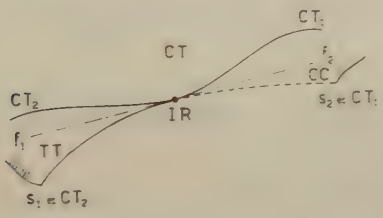


FIG. 5.

signe, ici région TT puisque le bord est s_1, fig. 3. Inversement, du côté convexe, se trouve une région CT (1). Les deux régions doivent donc être séparées par une courbe CT qui aboutit au point I. Dans le cas qui nous occupe, le bord étant une s_1 est caractérisée par $\sigma_2 = 0$, et est donc une courbe CT_2. Il est évident que la courbe CT intérieure au modèle est également une CT_2, car c'est σ_2 qui s'y annule. Le point I est donc un point de croisement limite de deux CT de même espèce.

On sait, voir § précédent n° 4, qu'en ce point I aboutit également une courbe f_1; nous démontrerons à présent que les deux courbes, CT et f_1 sont en I perpendiculaires au bord.

Soit, fig. 4, I s_1 un bord droit libre de charge supposé isostatique s_1. L'élément d'isostatique s_2 en I est normal au bord. Soit f et c les départs en I des courbes f et CT_2 que l'on sait devoir exister. Les directions perpendiculaires respectives sont notées f' et c'. On doit démontrer que les directions c et f coïncident avec s_2. par suite c' et f' sont sur le bord et $\gamma = \delta = 90°$.

En considérant les variations de la contrainte σ_2 on aura *identiquement* :

(1) Voir traité de photoélasticité de l'auteur, § 18, n° 6.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial s_1} = \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial c} \cdot \dfrac{\partial c}{\partial s_1} + \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial c'} \cdot \dfrac{\partial c'}{\partial s_1} \\ \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} = \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial c} \cdot \dfrac{\partial c}{\partial s_2} + \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial c'} \cdot \dfrac{\partial c'}{\partial s_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial s_1} = \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial f} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial s_1} + \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial f'} \cdot \dfrac{\partial f'}{\partial s_1} \\ \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} = \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial f} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial s_2} + \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial f'} \cdot \dfrac{\partial f'}{\partial s_2} \end{cases}$$

or $\sigma_2 = 0$ sur s_1 qui est bord libre $\therefore \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial s_1} = 0$ de plus $\dfrac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} = 0$ en I en vertu de l'équation de Maxwell : $\dfrac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} = -\dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1}$ et de $\rho_1 = \infty$.

Enfin, $\sigma_2 = 0$ le long de c qui est courbe CT_2, donc $\dfrac{\partial \sigma_2}{\partial c} = 0$.

Les identités deviennent alors

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial c'} \cdot \frac{\partial c'}{\partial s_1} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial c'} \cdot \frac{\partial c'}{\partial s_2} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial s_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial f'} \cdot \frac{\partial f'}{\partial s_1} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial s_2} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial f'} \cdot \frac{\partial f'}{\partial s_2} = 0$$

Si l'on imagine les cheminements élémentaires ds_1 et ds_2 sur les isostatiques, ainsi qu'indiqués figure 4, il s'en suit sur f' les composantes $\dfrac{\partial f'}{\partial s_2} ds_2$ et $-\dfrac{\partial f'}{\partial s_2} ds_1$ (longueurs positives) et l'on voit bien que

$$\frac{\partial f'}{\partial s_2} ds_2 = ds_2 \cos \gamma$$

$$-\frac{\partial f'}{\partial s_1} ds_1 = ds_1 \sin \gamma$$

de manière identique, on aura

$$\frac{\partial c'}{\partial s_2} ds_2 = ds_2 \cos \delta \qquad \frac{\partial f}{\partial s_2} ds_2 = ds_2 \sin \gamma \qquad \frac{\partial c}{\partial s_2} ds_2 = ds_2 \sin \delta$$

$$-\frac{\partial c'}{\partial s_1} ds_1 = ds_1 \sin \delta \qquad \frac{\partial f}{\partial s_1} ds_1 = ds_1 \cos \gamma \qquad \frac{\partial c}{\partial s_1} ds_1 = ds_1 \cos \delta$$

Les identités s'écrivent alors

$$-\frac{\partial \sigma_2}{\partial c'} \sin \delta = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial c'} \cos \delta = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial f} \cos \gamma - \frac{\partial \sigma_2}{\partial f'} \sin \gamma = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial f} \sin \gamma + \frac{\partial \sigma_2}{\partial f'} \cos \gamma = 0 .$$

Comme il doit exister un angle δ, les deux premières imposent $\frac{\partial \sigma_2}{\partial c'} = 0$ soit σ_2 constante sur c', c'est-à-dire nulle partout comme en I. La direction « c' » est une CT_2 comme c. Comme il n'y a qu'une CT_2 dans le modèle, on voit que c est sur s_2 et c' sur s_1 ($\delta = 90^o$).

De même, les deux dernières identités qui ne peuvent imposer $\sin \gamma = \cos \gamma = 0$, conduisent à $\frac{\partial \sigma_2}{\partial f} = 0$ et $\frac{\partial \sigma_2}{\partial f'} = 0$, soit σ_2 constante et nulle sur f et f', on doit alors avoir f sur s_2 et f' sur s_1.

L'expression $\frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} = 0$ n'est vraie qu'au départ en I; au delà il y a séparation entre s_2, c et f, qui ont seulement même tangente au bord.

3. — En un demi-point IR au contour libre d'une pièce aboutit, en plus du bord, une courbe CT tangente au bord.

Si le bord est concave, la courbe CT est dans le modèle.

Si le bord est convexe, elle est virtuelle (hors modèle).

Cette propriété peut être démontrée aisément en partant d'une fonction de tension d'Airy du troisième degré à laquelle on impose les conditions requises par le point étudié. Il est possible toutefois de pressentir intuitivement cette propriété.

Supposons un bord concave avec un demi-point singulier IR. D'un côté du point singulier le bord est une s_1 et de l'autre une s_2, figure 5. La partie s_1 est également une courbe CT_2 et la partie s_2 une CT_1. De plus, quand on entre dans le modèle dont le bord est concave de part et d'autre du point singulier, on doit trouver respectivement des régions TT et CC comme indiqué et ces deux régions, dans le modèle doivent être séparées par deux courbes CT. Ces deux courbes, dans le modèle, qui sont respectivement CT_1 et CT_2 sont dans le prolongement l'une de l'autre au point IR, sans cela il y aurait en ce point croisement de trois courbes CT, ce qui est sans signification. La situation est nécessairement celle indiquée sur la figure 5, c'est-à-dire que les deux courbes CT_1 sont du même côté du point singulier; elles comprennent entre elles la courbe d'inflexion f_2 également tangente au bord (voir I, n° 3). La tension σ_1 nulle au bord passe par un maximum négatif sur f_2 et repasse à zéro sur CT_1; elle devient positive dans la région CT. De l'autre côté le phénomène correspondant est présenté par σ_2.

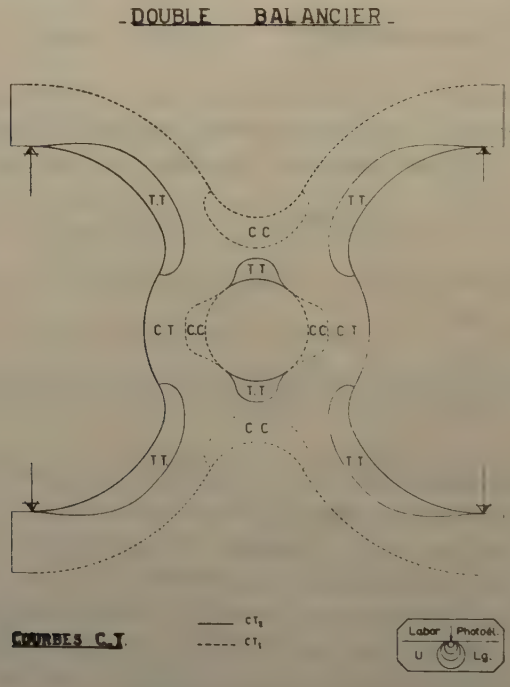


FIG. 6. — Courbes CT dans la pièce étudiée.

4.— Dans le cas d'un point singulier IR situé sur un bord libre rectiligne, le bord est une CT_1 du côté où il est s_2 et inversément. Il n'y a pas d'autre courbe CT ; toutefois le passage par zéro des tensions au bord se fait sans changement de signe sur le bord qui est une *f*. Il s'agit d'un maximum ou d'un minimum nul sur le bord. Les régions virtuelle et réelle qu'il sépare sont de même indice. Ce phénomène est amené par la superposition des CT de la propriété précédente.

5.— Deux plages CC et TT ne peuvent être voisines, sinon la ligne les séparant est neutre ce qui est un cas exceptionnel.

6.— Les courbes CT passent par les points de croisement des isochromes et des courbes d'égale somme de même ordre absolu, $m = |s|$, en réseaux concordants.

7.— Un axe de symétrie n'est pas normalement une courbe CT.

8.— Chaque fois que l'on pratique la séparation graphique des tensions suivant certains axes, on en tire évidemment la connais-

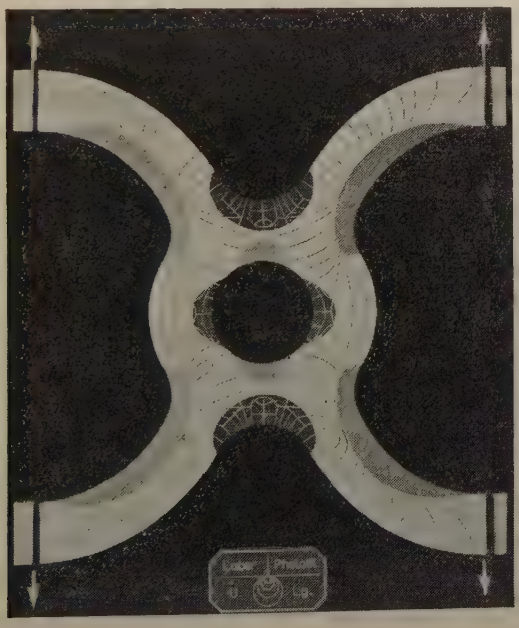


FIG. 7. — Réalisation du modèle au moyen d'une planche sciée suivant les isostatiques perpendiculaires aux compressions.

sance de points de passage obligés des courbes CT, ce qui permet de perfectionner leur mise en place. — A titre d'exemple de courbes CT, la figure 6 montre leur allure dans le double balancier.

L'exploitation des propriétés qui viennent d'être énoncées peut se faire d'une manière très suggestive en construisant un modèle en bois à grande échelle, complètement scié suivant les isostatiques perpendiculaires aux compressions.

Ainsi que cela a été exposé dans la Revue des Questions Scientifiques d'octobre 1952, ce modèle reconstitué supporte parfaitement sa charge. La figure 7 en montre la réalisation.

Université de Liège,
Laboratoire de photoélasticité
A. Pirard
Chargé de cours.

Spectre Infra-rouge à grande dispersion de CD_3Br (2900 à 3400 cm^{-1})

PAR

Ch. COURTOY
(Faculté des Sciences de Namur)

RÉSUMÉ. Nous avons pu obtenir à grande dispersion les spectres de plusieurs bandes d'harmoniques et de combinaisons de la molécule CD_3Br. Ce sont $3\nu_2$, $\nu_4 + \nu_6$, $\nu_4 + \nu_2$ et probablement $\nu_4 + \nu_5$.

INTRODUCTION

Lors de notre séjour à la station scientifique du Jungfraujoch nous avons eu l'occasion de prendre à grande dispersion le spectre infra-rouge de CD_3Br, dans la région de 2900 à 3400 cm^{-1}.

Le spectrographe utilisé est celui qui a été monté par le Professeur Migeotte pour l'Institut d'astrophysique de Cointe à Liège. La technique expérimentale est la même que celle qui a été utilisée pour notre travail sur les éthylènes (1). Le réseau employé était celui de 7500 traits par pouce.

L'étalonnage a été effectué en nous référant aux raies de Hg du National Bureau of Standards à Washington. Cependant pour la raie aux environs de 8850 cm^{-1}, nous avons adopté la valeur 8856,9 au lieu de 8857,7 qui était la valeur proposée.

Le gaz utilisé est le même que celui que nous avons employé précédemment dans notre travail à faible dispersion (2). Il a été préparé au laboratoire de M. le Prof. Jungers, de l'Université de Louvain.

La précision de ces mesures est d'environ 0,3 cm^{-1}.

Nous ne croyons pas utile de publier actuellement les spectres obtenus, car les bandes perpendiculaires sont perturbées par un certain nombre de raies de H_2O. Nous nous proposons de reprendre ce spectre quand le spectrographe sera mis sous vide. Nous espérons de plus obtenir alors une meilleure précision.

Si nous adoptons pour I_B la valeur de 109 10^{-40} gr cm^2 fournie

par les microwaves et 10,9 pour I_A, nous trouvons les deux termes

$$A = \frac{h}{8\pi^2 c I_A} = 2{,}566 \qquad \text{et} \qquad B = \frac{h}{8\pi^2 c I_B} = 0{,}257$$

L'écart normal entre les branches Q doit être 2(A — B), soit environ 4,6 cm^{-1}.

Région de 2950 cm^{-1}

Nous rencontrons ici une absorption ayant l'allure d'une bande parallèle avec une branche P large et peu intense, une branche Q très nette à 2931 cm^{-1} et une branche R dissymétrique ayant un maximum d'absorption vers les grandes fréquences et situé à 2957,4cm^{-1}. Cet écart de 26,4 cm^{-1} entre la branche Q et la branche R est anormalement grand, mais il est, en partie au moins, causé par la dissymétrie de la branche R.

Nous attribuons cette bande à la 2e harmonique de ν_2 (*) vibration de déformation symétrique CD, située à 990 cm^{-1}. L'anharmonicité rencontrée ici correspond à celle que nous avions trouvée précédemment pour la seconde harmonique de la même vibration pour CH_3Br. La fondamentale est à 1305,1 [3] et nous avons trouvé les branches P et R de la seconde harmonique à 2577 et 2594 [2]. Le centre de cette bande doit donc se trouver vers 2585 cm^{-1}. La 3me harmonique de CH_3Br serait alors la bande que nous avons signalée à 3875 cm^{-1}.

Région de 3000 à 3100 cm^{-1}

Nous trouvons dans cette région deux bandes parallèles ayant leur branche Q à 3005,2 et 3026,5 cm^{-1}. Viennent ensuite 8 branches Q d'une bande perpendiculaire qu'il nous est fort difficile d'analyser par suite de la superposition d'un certain nombre de raies de H_2O. Le centre doit être vers 3065 cm^{-1}. L'écart moyen entre ces raies est de 5,7 cm^{-1}.

Ces bandes doivent être attribuées à la combinaison des bandes dégénérées de valence CD et de déformation CBr ($\nu_4+\nu_6$). Ces bandes

---

(*) Notation de Herzberg.

se trouvent à environ 2294 et 714 cm $^{-1}$. La somme des fréquences est donc environ 3008 cm $^{-1}$ et la combinaison doit donner lieu à deux bandes parallèles et une bande perpendiculaire. La même attribution avait été proposée par Nielsen et Barker ([4]) pour les deux bandes parallèles et la bande perpendiculaire à 3981, 4047,9 et 4089,6 de CH_2Cl. Nous croyons devoir donner la même attribution aux bandes parallèles 4017 et 3993 de CH_3Br ([5]). Il est fort probable que les bandes trouvées avec faible dispersion à environ 3028 pour CD_3Cl (*) et 2967 cm^{-1} pour CD_3I ([2]) sont dues à cette même combinaison.

Région de 3180 à 3400 cm^{-1}

Dans cette partie du spectre, nous observons deux bandes perpendiculaires se recouvrant partiellement, mais il est facile de répartir les raies entre les deux bandes. L'écart entre les branches Q de ces deux bandes est nettement différent. Dans la bande de plus courtes fréquences il est en moyenne de 5,9 cm^{-1}, environ le même que celui de la bande à 3065 cm^{-1}. Le centre de cette bande doit être vers 3230 cm^{-1}.

L'écart entre les pics de la seconde bande est en moyenne de 3,8 cm^{-1}, donc nettement moindre que pour la bande précédente; ce qui suggère que dans ce cas la valeur de I_A est supérieure à 10,9, tandis que pour les deux autres bandes la valeur serait inférieure. La distance est plus grande au centre (4 cm^{-1}) qu'aux extrémités, ce qui montre une interaction entre la rotation et la vibration. Les branches Q du centre de la bande sont bien marquées et nous retrouvons cinq fois l'alternance caractéristique de l'axe de symétrie ternaire avec une branche plus intense que les deux suivantes. Nous pouvons ainsi localiser la première branche Q de sa série R à 3332,2 cm^{-1}. En négligeant l'action du moment angulaire de vibration nous trouvons 3330,2 cm^{-1} pour le centre de la bande ([8]). De part et d'autre de cette partie centrale nous avons deux branches qui ne sont pratiquement pas marquées. Puis de nouveau, de part et d'autre, 4 ou 5 branches Q visibles, bien que faibles.

On trouve aisément les bandes correspondantes dans les spectres

(*) Résultat non publié. Signalons cependant que Noether semble attribuer cette bande à une impureté ([6]).

de CH_3Cl, CH_3Br et CH_3I. La structure fine en a été étudiée jadis. Pour CH_3Cl, les deux bandes sont superposées et les deux études qu'on en a faites n'arrivent pas à les séparer (5) (4). Avec les pouvoirs séparateurs actuels, on pourrait probablement y arriver. Par contre dans les spectres de CH_3Br et CH_3I elles sont, en grande partie, séparées. Bien que le pouvoir séparateur obtenu par Moorhead (5) soit faible, on reconnaît fort bien les deux bandes que nous avons obtenues pour CD_3Br. Pour les deux gaz avec radical CH_3, la bande de plus grande fréquence présente aussi cinq fois l'alternance des molécules à axe ternaire. Ces deux bandes ont leur centre respectivement à environ 4450 et 4500 cm^{-1}. D'après Moorhead l'écart entre les pics serait pour CH_3Br de 8,1 cm^{-1} pour les faibles fréquences et de 9,0 pour la bande de fréquences plus élevées. Pour CH_3I, les valeurs correspondantes seraient 10,3 et 9,5 cm^{-1}. Il ne semble donc pas qu'on retrouve pour ces deux molécules la différence relativement grande que nous avons observée entre les écarts pour les deux bandes de CD_3Br. Il serait cependant intéressant d'avoir une étude plus récente de ces deux bandes.

Pour la première bande de CD_3Br, à 3130 cm^{-1}, nous croyons devoir adopter l'interprétation proposée jadis par Nielsen et Barker (4) pour la bande correspondante de CH_3Cl, à savoir une combinaison entre ν_4, vibration de valence asymétrique CH (CD), et ν_2, vibration de déformation symétrique CH (CD), ces bandes se trouvaient pour CD_3Br à environ 2290 et 990 cm^{-1}. Cette combinaison doit de fait se manifester par une bande perpendiculaire. Nous avons trouvé les bandes correspondantes de CH_3Br et CH_3I à environ 4375 et 4320 cm^{-1} (2). La position et la structure fine des bandes (5) correspondent à cette interprétation.

L'attribution de la seconde bande, située à 3330 cm^{-1}, est beaucoup plus difficile. La position de cette bande dans le spectre de CD_3Br pourrait à la rigueur justifier l'interprétation proposée pour la bande correspondante de CH_3Cl (3), à savoir une combinaison entre ν_4, vibration de valence asymétrique CH, avec l'harmonique de ν_3, vibration de valence CX (X étant l'halogène). Cette vibration doit de fait se manifester par une bande perpendiculaire. Nous avions pour CD_3Br $2290 + 2.577 = 3444$ cm^{-1}.

Cependant nous ne croyons pas pouvoir adopter cette interprétation. Notre bande correspond trop bien aux bandes trouvées par Moorhead (5) pour CH_3Br et CH_3I pour ne devoir pas être expliquée de la même manière. Or la position de ces deux bandes ne supporte

absolument pas l'explication proposée. Par contre la position de toute la série de bandes correspond très bien avec la combinaison de ν_4 vibration de valence asymétrique CH (CD) et ν_5 vibration de déformation asymétrique CH (CD). Pour CD_3Br nous aurions $2290 + 1053 = 3343$; ce qui est en meilleur accord avec la fréquence expérimentale. Nous devons cependant constater que nous ne trouvons pas les deux bandes parallèles qui devaient normalement se manifester pour une telle combinaison.

En terminant, nous tenons à remercier Mr le Professeur de Hemptinne qui nous a toujours guidé dans nos recherches et qui a mis à notre disposition l'échantillon de CD_3Br. Nous remercions aussi très sincèrement Mr le Professeur Migeotte qui nous a si aimablement permis d'utiliser son spectrographe à réseau. Nos remerciements vont aussi au Fonds National de la Recherche Scientifique qui nous a facilité ce travail et à la Station Scientifique du Jungfraujoch qui nous a accueilli pour le réaliser.

REFERENCES

(1) C. Courtoy et M. de Hemptinne, *Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, Série I, t. 66, p. 82, 1952.
(2) C. Courtoy, *id.*, Série I, tome LX, p. 122, 1942.
(3) W.H. Bennet et C.F. Meyer, *Phys. Rev.*, 32 ,888, 1928.
(4) A.H. Nielsen et E.F. Barker, *Phys. Rev.*, 46, 970, 1934.
(5) J.G. Moorhead, *Phys. Rev.*, 39, 788, 1932.
(6) H.D. Noether, *J. Chem. Phys.*, 10, 664, 1942.
(7) J.W. Simmons et J.H. Goldstein, *J. Chem. Phys.*, 20, 122, 1952.
(8) G. Herzberg, *J-R and Raman Spectra of polyatomic Molecules*, pp. 428-433.

Fonction potentielle de l'éthylène

PAR

J. CHARETTE et C. MANNEBACK

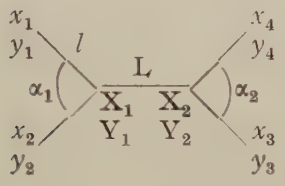
Sommaire. Les coefficients d'une fonction potentielle harmonique plane de l'éthylène ont été calculés au moyen des fréquences expérimentales du C_2H_4 et du C_2D_4. On a pu ainsi recalculer toutes les fréquences de vibration plane des différents deutéroéthylènes, la plupart à moins de 1 % près. Le rôle perturbateur important de l'anharmonicité sur certains paramètres de la fonction potentielle est mis en évidence.

1. — Introduction

La fonction potentielle plane de l'éthylène a été calculée successivement par Delfosse (1), Manneback et Verleysen (2), Tchang (3). Dès 1939, ce dernier réussissait à prévoir avec une très bonne approximation la majorité des fréquences de vibration des éthylènes, tant normal que deutérosubstitués. Néanmoins, comme il se basait sur une interprétation erronée des basses fréquences ν_{10} et ν_6, l'écart entre ces valeurs théoriques et les fréquences expérimentales pour les basses fréquences de tous les éthylènes s'est révélé assez notable, étant de l'ordre de 10 à 20 %. Ayant obtenu au spectrographe infrarouge l'ensemble des fréquences de vibration des éthylènes (4), il a semblé utile de refaire le calcul.

2. — Données de base

a) *Données géométriques.* Nous adoptons les dimensions fournies par Gallaway et Barker [5]



$\alpha = 119°55'$
$p = \sin \alpha/2$
$q = \cos \alpha/2$
$L = 1{,}353\ 10^{-8}$ cm
$l = 1{,}071\ 10^{-8}$ cm

b) *Masses.* D'après Herzberg [6]

$m_H = 1{,}008132$ (p. 530)
$m_D = 2{,}014726$ (p. 532)
$m_C = 12{,}00388$ (p. 513)

c) *Moments d'inertie.* En unités 10^{-40} gr cm^2.

Tableau I

	1. C_2H_4	2. C_2H_3D	3. cis	4. trans	5. asym.	6. C_2D_3H	7. C_2D_4
I_a	5,75285	6,99958	8,43249	8,05887	8,62488	9,86691	11,4969
I_b	28,0777	30,5889	32,9914	33,5574	32,6622	35,5160	37,9050
I_c	33,8306	37,5885	41,4239	41,6163	41,2871	45,3829	49,4019

d) *Fréquences expérimentales.* Ramenées à l'état gazeux, par la correction d'état physique (conférer § 4) et exprimées en cm^{-1}.

TABLEAU II

		1. C_2H_4	2. C_2H_3D	3. cis	4. trans	5. asym	6. C_2D_3H	7. C_2D_4
	a							
A_{1g}	1.	3019,6[b]	3028	2300	2284,3[d]	3019	2280	2258,2[d]
	2.	1624,6[b]	1605,8[d]	1572,7[d]	1572,7[d]	1585[d]	1551,6[d]	1519,5[d]
	3.	1342,7[b]	1290	1219,4[d]	1286,7[d]	1030	1046,9	984,6[d]
A_u	4.	1027[c]	1000,8	973,2[q]	988,8	889,9[q]	765	726,4[c]
B_{1g}	5.	3086[d]	3062	3055	3046[q]	2333	2332	2315,4[d]
	6.	1240,5[e]	1128	?	1004,6[d]	1150[p]	998,6[d]	1010,8[m]
B_{1u}	7.	949,2[f]	943,3	842,2	727	943	724	720[f]
B_{2g}	8.	950,5[g]	807,3	765,8[d]	867,1[d]	751,3	918,8	787,9[d]
B_{2u}	9.	3105,5[f]	3103	3058	3064	3090	3045	2345[f]
	10.	810,5[c]	712,9[n]	646[n]	678[n]	660[n]	609,7[n]	584,3
B_{3u}	11.	2989,5[f]	2272	2251	2270	2228	2220	2200,2[f]
	12.	1443,5[f]	1403	1342	1300	1384	1289,5	1077,9[f]

a. Notations de Herzberg ([7]) p. 107, pour C_2H_4, C_2D_4.
b. Moyenne des valeurs de Dickinson, Dillon, Rasetti ([8]) et Bhagavantam ([9]).
c. Arnett et Crawford ([10]).
d. Par les fréquences Raman liquides de de Hemptinne et Van Riet ([11]).
e. Par la fréquence 1236 donnée par Rank ([12]).
f. Gallaway et Barker ([5]).
g. Par la fréquence 947 Raman liquide moyenne des valeurs de Glockler ([14]). et de de Hemptinne ([11]).
m. Par la bande 1595,1 considérée comme la combinaison $\nu_6 + \nu_{10}$ ([10]).
n. Bandes de fréquences peu certaines.
q. Par application du produit isotopique.
p. Lancaster, Inskeep, Crawford ([13]).

Sauf indication contraire, les fréquences des deutérosubstitués sont empruntées à Charette et de Hemptinne ([4]).

3. — Recherche des équations aux fréquences

Nous employons la méthode bien connue de Wilson ([17]). En coordonnées symétriques internes (cfr Manneback-Verleysen ([2]), p. 355) la fonction potentielle peut s'écrire :

$$
\begin{aligned}
2\,U = {} & Cw_1^2 + Au_1^2 + Bv_1^2 + 2Du_1v_1 + 2Eu_1w_1 + 2Fv_1w_1 \\
& + Iu_2^2 + Hv_2^2 + 2Ju_2v_2 \\
& + Ku_3^2 + 4Lv_3^2 + 4Nu_3v_3 \\
& + Qu_4^2 + 4Rv_4^2 + 4Su_4v_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{1g}\ u_1 &= \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 \\
v_1 &= l(\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) \\
w_1 &= \Delta L \\
B_{3u}\ u_2 &= \Delta l_1 + \Delta l_2 - \Delta l_3 - \Delta l_4 \\
v_2 &= l(\Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_2) \\
B_{2u}\ u_3 &= \Delta l_1 - \Delta l_2 - \Delta l_3 + \Delta l_4 \\
v_3 &= l(\Delta\beta_1 - \Delta\beta_2) \\
B_{1g}\ u_4 &= \Delta l_1 - \Delta l_2 + \Delta l_3 - \Delta l_4 \\
v_4 &= l(\Delta\beta_1 + \Delta\beta_2)
\end{aligned}
$$

$\Delta\beta_1$, angle formé par la bissectrice intérieure de l'angle α_1 déformé et le prolongement de la direction CC déplacée de sa position d'équilibre Ox prise comme origine des angles; cet angle, ainsi que $\Delta\beta_2$ défini de façon analogue, sont comptés positivement de l'axe y vers l'axe x.

Matrice de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées symétriques internes :

		X_1	X_2	Y_1	Y_2	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4	
	w_1	-1	1											1
A_{1g}	u_1	$2q$	$-2q$			$-q$	$-q$	q	q	p	$-p$	$-p$	p	2
	v_1	$-2p$	$2p$			p	p	$-p$	$-p$	q	$-q$	$-q$	q	3
	u_2	$2q$	$2q$			$-q$	$-q$	$-q$	$-q$	p	$-p$	p	$-p$	4
B_{3u}	v_2	$-2p$	$-2p$			p	p	p	p	q	$-q$	q	$-q$	5
	u_3			$-2p$	$-2p$	$-q$	q	$-q$	q	p	p	p	p	6
B_{2u}	$2v_3$			$-2q$	$-2q$	p	$-p$	p	$-p$	q	q	q	q	7
	u_4			$-2p$	$2p$	$-q$	q	q	$-q$	p	p	$-p$	$-p$	8
B_{1g}	$2v_4$			$-2k$	$2k$	p	$-p$	$-p$	p	q	q	$-q$	$-q$	9

Remarquer que nous prenons $2v_3$ et $2v_4$ comme variables au lieu de v_3 et v_4. $k = q + 2\,l/L$.

MATRICE G/4 DE WILSON

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	$\frac{1}{2M}$	$-\frac{q}{M}$	$\frac{p}{M}$							1
	$-\frac{q}{M}$	$\frac{1}{\mu_2}$	$-\frac{P}{M}$	δ	asym	δ	cis	δ	trans	2
A_{1g}	$\frac{p}{M}$	$-\frac{P}{M}$	$\frac{1}{\mu_1}$		δ		δ		δ	3
		δ	asym	$\frac{1}{\mu_2}$	$-\frac{P}{M}$	δ	trans	δ	cis	4
B_{3u}			δ	$-\frac{P}{M}$	$\frac{1}{\mu_1}$		δ		δ	5
		δ	cis	δ	trans	$\frac{1}{\mu_1}$	$\frac{P}{M}$	δ	asym	6
B_{2u}			δ		δ	$\frac{P}{M}$	$\frac{1}{\mu_2}$		δ	7
		δ	trans	δ	cis	δ	asym	$\frac{1}{\mu_1}$	$\frac{2pk}{M}$	8
B_{1g}			δ		δ		δ	$\frac{2pk}{M}$	$\frac{1}{\mu_3}$	9

où $2v_3$ et $2v_4$ ont été conservés comme variables. Tous les éléments de la matrice ont été divisés par 4. Pour le C_2H_4 et le C_2D_4, $\delta = 0$. Pour le cis, les δ des groupes de cases notées trans et asym sont à annuler. De même pour les deux autres bisubstitués. Pour le monosubstitué, tous les éléments sont à conserver en remplaçant δ par $-\delta/2$. Pour le trisubstitué, remplacer δ par $\delta/2$.

$\delta = \frac{1}{2}(1/m_H - 1/m_D)$ $\qquad P = 2pq$

$1/\mathfrak{M}_i = {}^1/_4(1/m_1+1/m_2+1/m_3+1/m_4)$ d'où : $1/\mathfrak{M}_1 = 1/m_H \quad 1/\mathfrak{M}_7 = 1/m_D$

$1/\mu_1 = 1/\mathfrak{M}_i + 2p^2/M$ $\qquad 1/\mathfrak{M}_3 = 1/\mathfrak{M}_4 = 1/\mathfrak{M}_5 = \frac{1}{2}(1/m_H + 1/m_D)$

$1/\mu_2 = 1/\mathfrak{M}_i + 2q^2/M$ $\qquad 1/\mathfrak{M}_2 = {}^1/_4(3/m_H + 1/m_D)$

$1/\mu_3 = 1/\mathfrak{M}_i + 2k^2/M$ $\qquad 1/\mathfrak{M}_6 = {}^1/_4(1/m_H + 3/m_D)$

$i = 1$ pour le C_2H_4, 2 pour le C_2H_3D, etc. selon la numération des éthylènes adoptée en tête du tableau I des moments d'inertie.

Familles de symétrie pour les bisubstitués :

cis $A_1 = A_{1g} + B_{2u}$ $\qquad B_1 = B_{1g} + B_{3u}$

trans $A_g = A_{1g} + B_{1g}$ $\qquad B_u = B_{2u} + B_{3u}$

asym $A_1 = A_{1g} + B_{3u}$ $\qquad B_1 = B_{1g} + B_{2u}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$-\lambda + CG_{11} + EG_{12} + FG_{13}$	$EG_{11} + AG_{12} + DG_{13}$	$FG_{11} + DG_{12} + BG_{13}$						
$CG_{21} + EG_{22} + FG_{23}$	$-\lambda + EG_{21} + AG_{22} + DG_{23}$	$FG_{21} + DG_{22} + BG_{23}$	Iδ	Jδ	Kδ	Nδ	Qδ	Sδ
			asym		cis		trans	
$CG_{31} + EG_{32} + FG_{33}$	$EG_{31} + AG_{32} + DG_{33}$	$-\lambda + FG_{31} + DG_{32} + BG_{33}$	Jδ	Hδ	Nδ	Lδ	Sδ	Rδ
Fδ	Aδ	Dδ	$-\lambda+IG_{44} + JG_{45}$	$JG_{44} + HG_{45}$	Kδ	Nδ	Qδ	Sδ
asym					trans		cis	
Fδ	Dδ	Bδ	$IG_{54} + JG_{55}$	$-\lambda+JG_{54} + HG_{55}$	Nδ	Lδ	Sδ	Rδ
Eδ	Aδ	Dδ	Iδ	Jδ	$-\lambda+KG_{66} + NG_{67}$	$NG_{66} + LG_{67}$	Qδ	Sδ
cis			trans				asym	
Fδ	Dδ	Bδ	Jδ	Hδ	$KG_{76} + NG_{77}$	$-\lambda+NG_{76} + LG_{77}$	Sδ	Rδ
Eδ	Aδ	Dδ	Iδ	Jδ	Kδ	Nδ	$-\lambda+QG_{88} + SG_{89}$	$SG_{88} + RG_{89}$
trans			cis		asym			
Fδ	Dδ	Bδ	Jδ	Hδ	Nδ	Lδ	$QG_{98} + SG_{99}$	$-\lambda+SG_{98} + RG_{99}$

Tous les éléments sont à retenir pour les mono- et trisubstitués seulement, en remplaçant δ respectivement par $-\delta/2$ et $\delta/2$. Pour le C_2H_4 et le C_2D_4, seulement retenir les quatre déterminants sur la diagonale principale, et pour les bisubstitués, retenir en plus les groupes de cases indiquées. λ désigne les racines des déterminants égalés à zéro.

$\lambda = \frac{\nu^2}{(1303{,}06)^2}$ ν étant la fréquence en cm^{-1}, de sorte que les masses sont exprimées en unités atomiques et les constantes potentielles en 10^5 dynes/cm.

4. — Correction d'état physique

La comparaison des résultats Raman et infrarouges pour les fréquences de vibrations actives dans les deux cas montre une différence croissante avec les fréquences. On attribue cette différence au fait que le spectre Raman est pris à l'état liquide tandis que le spectre infrarouge l'est à l'état gazeux. Des mesures toutes récentes effectuées au laboratoire de M. de Hemptinne de spectre Raman à l'état gazeux sous haute pression confirment entièrement ceci. Pour travailler sur des données expérimentales homogènes, nous avons ramené toutes les fréquences expérimentales à l'état gazeux. Nous avons en effet constaté que, si la différence des fréquences liquide-gaz augmente avec la fréquence, le pourcentage de différence reste sensiblement constant. Nous avons donc majoré de cette valeur 0,365 % les fréquences connues seulement à l'état liquide.

5. — Correction d'anharmonicité

Quand on essaie de résoudre les équations aux fréquences obtenues ci-dessus, au moyen des données expérimentales, pour en tirer les valeurs des constantes de la fonction potentielle, on constate que ces équations sont incompatibles. Si l'on prend par exemple parmi les plus simples les équations pour le type de symétrie B_{3u}, on dispose apparemment, avec les fréquences expérimentales ν_{11} et ν_{12} du C_2H_4 et du C_2D_4, de quatre équations aux trois inconnues H, I, J. En fait, les deux équations renfermant le produit des fréquences donnent, par division membre à membre, une relation indépendante des inconnues (c'est l'expression du produit isotopique pour ce type de symétrie) et cette relation n'est pas exactement vérifiée par les fréquences expérimentales. La différence entre le rapport isotopique théorique et expérimental provient de ce que l'on est parti d'une fonction potentielle quadratique qui suppose donc les vibrations parfaitement harmoniques, ce qui n'est pas le cas.

D'autre part, faute de données expérimentales suffisantes, nous ne pouvons songer à étudier une fonction potentielle renfermant tous les termes anharmoniques requis. Nous devons donc nous contenter d'une approximation de l'anharmonicité. Avec plusieurs auteurs, nous supposons que l'anharmonicité affecte principalement les vibrations

de valence CH et CD. Ceci nous conduit à « corriger » les seules valeurs expérimentales des hautes fréquences et à les remplacer par des « fréquences harmoniques » (que nous noterons ω) au moyen desquelles les équations aux fréquences sont rendues compatibles. Une bonne correction d'anharmonicité sera donc celle qui, avec le minimum d'arbitraire, rendra égaux les rapports isotopiques théoriques et expérimentaux.

Pour le C_2H_4 et le C_2D_4, la supposition que toute l'anharmonicité est attribuée aux vibrations de valence CH et CD ramène le problème à celui d'une molécule diatomique. En posant $1/\mu_H = 1/m_H + 1/M$ et $1/\mu_D = 1/m_D + 1/M$ on obtient (Herzberg ([6]) p. 142 et Manneback ([16]))

$$\nu = \omega (1 - 2x)$$

ν étant la fréquence expérimentale
ω étant la fréquence théorique « harmonique »
x étant la constante d'anharmonicité.

D'autre part

$$\sqrt{\frac{\mu_D}{\mu_H}} = \frac{1}{\rho} \quad \text{et} \quad x_D = \rho x_H$$

d'où

$$\frac{\nu_H}{\nu_D} = \frac{\omega_H}{\omega_D} \cdot \frac{1 - 2x_H}{1 - 2x_D}$$

Notre but étant de corriger la différence entre les rapports isotopiques nous considérons, au lieu de la seule haute fréquence, l'ensemble des fréquences de chaque famille de symétrie. Posant τ le rapport isotopique (*) nous avons

$$\tau_{exp} = \tau_{th} \cdot \frac{1 - 2x_H}{1 - 2\rho x_H} \qquad (1)$$

Nous obtenons ainsi x_H et x_D pour les différentes familles, ce qui nous permet de passer aux fréquences harmoniques (tableau IV) et de vérifier dans quelle mesure l'égalité des rapports isotopiques est réalisée.

(*) Par exemple $\tau_{exp}\ A_{1g} = \frac{(\nu_1\ \nu_2\ \nu_3)c_2H_4}{(\nu_1\ \nu_2\ \nu_3)c_2D_4}$: (cfr Herzberg ([7]) p. 233).

TABLEAU III

	τ_{th}	$\tau_{exp\ vap}$	$\tau_{exp\ «harm»}$	x_H	x_D
A_{1g}	1,99847	1,94963	1,99847	0,043073	0,031625
B_{1g}	1,65379	(1,63569)	1.65379 (1,65379)	0.030587 (0,019987)	0,022458 (0,014675)
B_{1u}	1,32194	1,31833			
B_{2g}	1,21670	1,20637			
B_{2u}	1,86880	1,83699	1,86880	0,030587	0,022458
B_{3u}	1,86880	1,81960	1,86880	0,046174	0,033902

Pour la famille B_{1g}, en opérant comme il vient d'être dit, à partir des valeurs expérimentales ramenées à l'état de vapeur renseignées au tableau II, on obtient pour x_H, x_D, ω_H et ω_D les valeurs indiquées entre parenthèses aux tableaux III et IV. La suite des calculs, effectuée sur cette base, sera renseignée plus bas aux tableaux V et VI également entre parenthèses.

On est immédiatement frappé par le grand écart obtenu ainsi entre les valeurs de x pour B_{1g} et B_{2u}. Or, les modes normaux de haute fréquence de ces deux familles consistent en une vibration antisymétrique de chacun des deux radicaux CH_2 (ou CD_2) ; le « couplage » avec les modes de « balancement » de basse fréquence des mêmes radicaux est très faible. Il y a donc tout lieu, si l'effet de l'anharmonicité est considéré comme localisé sur la liaison de valence CH (ou CD), de s'attendre à une valeur très peu différente de x pour les deux familles. Tel n'est cependant pas le cas. D'autre part, on se rend facilement compte de la grande répercussion sur la valeur calculée x, produite par un léger changement sur les données expéri-

mentales. Ainsi, si l'on accepte comme valeurs « expérimentales » à l'état vapeur pour ν_6

$$\nu(C_2H_4) = 1237.6\ cm^{-1} \qquad \nu(C_2D_4) = 1014.7\ cm^{-1}$$

tout en conservant les valeurs de ν_5, on obtient pour x_H et x_D des valeurs identiques à celles calculées pour B_{2u}. Nous avons poursuivi parallèlement un calcul sur ces bases et les résultats correspondants sont indiqués sans parenthèses dans tous les tableaux depuis III jusqu'au dernier. Assurément, l'altération pouvait aussi bien porter sur les hautes fréquences ν_5 ou mieux encore sur les hautes et basses fréquences simultanément des deux molécules C_2H_4 et C_2D_4. Il est essentiel de remarquer que, si ces altérations sont mathématiquement indéterminées, elles sont cependant parfaitement admissibles, compte tenu de l'incertitude qui pèse sur les données expérimentales : larges raies Raman de très faible intensité pour ν_5 et faibles bandes de combinaison infra-rouges (où intervient encore l'anharmonicité de façon complexe) pour ν_6. Le choix ci-dessus pour les fréquences ν_6 a été fait de façon à retrouver un rapport isotopique « harmonique » $(\omega_5\nu_6)_H/(\omega_5\nu_6)_D$ égal au rapport isotopique théorique, ce qui est le but même de la correction d'anharmonicité. On obtient ainsi les équations aux produits des fréquences dont la compatibilité est indispensable pour le calcul précis d'une fonction potentielle « harmonique » (*).

On pourrait encore remarquer que la valeur de x pour B_{2u} n'est, elle-même, pas particulièrement sûre, à cause de la grande difficulté à situer la position exacte du centre des très faibles bandes infra-rouges ν_{10}. La valeur commune de x_H pour B_{1g} et B_{2u} pourrait donc tout aussi bien être élevée, jusqu'à 0,0375, sans se mettre en contradiction avec la précision des données expérimentales actuelles. Ceci offrirait certains avantages, comme on va le voir. Néanmoins, on n'a pas jugé utile de reprendre l'ensemble des calculs sur cette nouvelle base.

Il reste à examiner la correction de l'anharmonicité pour les molécules « isotopiques » mono-, bi- et trideutérées. Nous sommes ici

---

(*) En réalité, on est parti de l'égalité de x pour B_{2u} et B_{1g}. On en a déduit, les ν_5 restant inchangés,

$$\nu_6(H) = 1237.633 \qquad \nu_6(D) = 1014.700$$

Ces valeurs, adoptées pour le calcul, donnent une valeur identique à la dernière décimale pour τ_{th} et $\tau_{exp\ «\ harm\ »}$.

sur un terrain encore moins solide. Cependant, la question n'intervient que pour comparer les fréquences expérimentales aux fréquences calculées à partir d'une fonction potentielle préalablement déterminée à partir de C_2H_4 et C_2D_4. Si l'on tient compte de ce que les radicaux CH_2, CHD, CD_2 se comportent de façon presque autonome chez la plupart des modes normaux ([2]) ([2bis]), on peut admettre, faute de meilleurs renseignements, pour les bisubstitués

		x_H	x_D
trans et cis	$x(A_g) = x(A_1) = \frac{1}{2}[x(A_{1g}) + x(B_{2u}) =$	0,03684	0,02704
	$x(B_u) = x(B_1) = \frac{1}{2}[x(B_{2u}) + x(B_{3u})] =$	0,03838	0,02818
asym	$x(A_1) = \frac{1}{2}[x(A_{1g}) + x(B_{3u})] =$	0,04462	0,03276
	$x(B_1) = x(B_{1g}) = x(B_{2u}) =$	0,03059	0,02246

Dans chaque cas, on prendra les valeurs de x_H pour les fréquences situées vers 3000 cm^{-1} et celles de x_D pour les fréquences situées vers 2000 cm^{-1}. On obtient ainsi le tableau IV. Pour les mono- et trisubstitués, le choix est moins clair, mais peut se faire en examinant les figures des modes normaux connues ([2bis]).

TABLEAU IV. — FRÉQUENCES HARMONIQUES ω CALCULÉES EN CM^{-1}

		1. C_2H_4	3. Cis	4. trans	5. asym	7. C_2D_4
A_{1g}	ω_1	3304,2	2431,5	2414,9 (2395,2)	3314,8	2410,7
B_{1g}	ω_5	3287,1 (3214,5)	3309,0 (3271,4)	3288,3 (3251,0)	2442,7 (2423,0)	2424,3 (2385,4)
B_{2u}	ω_9	3307,9	3301,2	3318,8	3291,4 (3254,6)	2455,3
B_{3u}	ω_{11}	3293,7	2385,4 (2365,1)	2405,6	2384,2	2360,2

L'examen de ce tableau révèle trois cas pour lesquels la loi bien connue de Rayleigh ([18]) se trouve violée, à savoir cis $\omega_H(B_1) = 3309{,}0$; trans $\omega_H(B_u) = 3318{,}8$; asym $\omega_H(A_1) = 3314{,}8$. Dans ces trois cas, la fréquence calculée pour le deutérosubstitué excède la plus haute

des fréquences de C_2H_4 appartenant aux deux familles dont la symétrie intervient, respectivement C_2H_4 : ω_{11}, ω_9 et ω_1. C'est une preuve que la correction adoptée pour l'anharmonicité n'est pas satisfaisante. Cette difficulté disparaît si l'on adopte une valeur plus élevée pour $x(B_{1g}) = x(A_{2u})$, par exemple la valeur encore admissible du point de vue expérimental $x = 0{,}0375$ déjà mentionnée.

6. — Résolution des équations aux fréquences des petites familles

Les équations des familles B_{1g}, B_{2u}, B_{3u} étant rendues compatibles par l'emploi des fréquences harmoniques du C_2H_4 et du C_2D_4, on les résout aisément, les inconnues étant les coefficients H, I, J, K, N, L, Q, S, R de la fonction potentielle. On obtient ainsi les valeurs reprises dans les tables V et VI. Inversement, ces valeurs, introduites dans les déterminants aux fréquences, permettent le calcul des fréquences de vibration des molécules isotopiques (*).

7. — Résolution des équations aux fréquences des grandes familles

Les équations aux fréquences du C_2H_4 et du C_2D_4 type A_{1g} renferment 6 paramètres alors qu'on ne dispose, au moyen des fréquences expérimentales de ces deux corps, que de 5 équations indépendantes. Tchang [3] a indiqué une méthode permettant d'exprimer les 6 paramètres en fonction d'une seule variable auxiliaire. Nous obtenons ainsi :

$$A = 1{,}636867$$

$$B = 3{,}751938 + 2{,}535951 \cos\theta$$

$$C = 3{,}751938 - 2{,}535951 \cos\theta$$

$$D = \pm 1{,}091513 \cos\frac{\theta \pm \varphi}{2} \qquad \cos\varphi = 0{,}908638$$

(*) Dans un premier travail, nous avions employé une approximation de la formule (1) qui nous avait conduits à des valeurs des x supérieures de 7 % en moyenne à celles du Tableau III, d'où des valeurs également exagérées des coefficients du Tableau V. C'est avec ces valeurs qu'ont été calculées les fréquences des molécules isotopiques.

$$E = \pm 1{,}091513 \sin \frac{\theta \pm \varphi}{2}$$

$$F = 2{,}535951 \sin \theta$$

les A, B, etc. de Tchang étant reliés à nos coefficients A, B, etc. par des relations simples :

$$A = B\ m_H/4$$
$$B = C\ m_H/4$$
$$C = A\ M/2 + q^2 m_H B + p^2 m_H C - q\sqrt{2m_H M}D + p\sqrt{2m_H M}E - P m_H F$$
$$D = F\ m_H/4$$
$$E = B\ q m_H/2 - F\ p m_H/2 - D(m_H M/8)^{1/2}$$
$$F = F\ q m_H/2 - C\ p m_H/2 - E(m_H M/8)^{1/2}$$

Pour lever l'indétermination, nous avons employé la fréquence expérimentale 1384 du $C_2H_2D_2$ asym. (*). Une première indication sur la valeur de θ nous est fournie par les valeurs des coefficients F, f_c et γ_c de Manneback-Verleysen: F = 8,6740 10^5 dynes/cm

$$f_c = -0{,}8131$$
$$\gamma_c = -0{,}5245$$

En faisant cos θ = 0,6 puis 0,7 et 0,9 on obtient (à cause des doubles signes) quatre valeurs pour chacun de ces coefficients :

		0,6	0,7	0,9
f_c	1.	—1,223191	—1,016241	—0,388787
	2.	2,981115	3,399779	4,487411
	3.	—1,722856	—1,448964	—0,638622
	4.	3,480780	3,832502	4,737246
γ_c	1.	—2,587397	—2,335616	—1,849552
	2.	0,763921	0,731346	0,415438
	3.	—1,588067	—1,305534	—0,760559
	4.	—0,235409	—0,298736	—0,673555
F	1.	11,958644	11,668219	11,099265
	2.	10,366029	10,779898	12,060175
	3.	9,728185	9,451544	8,963715
	4.	12,596488	12,996572	14,195725

(*) Cette fréquence a été retenue à cause de l'accord entre nos mesures [4] et celles de Lancaster [13], de la netteté de cette bande en infrarouge (type A), du bon accord Raman infrarouge, et enfin parce que étant une basse fréquence, elle ne nécessite pas de correction d'anharmonicité.

L'examen de ces différentes valeurs indique clairement que la solution 3 est à retenir. Introduisant donc ces valeurs dans le déterminant aux fréquences pour le type A_1 de l'asymétrique où on a fait $\lambda = 1{,}128089$ (par $\nu = 1384$) on obtient successivement les valeurs 0,138095 ; 0,104891 ; 0,032320. En continuant les essais on arrive finalement à la valeur de cos $\theta = 0{,}972721$ qui annule le déterminant, ce qui détermine les 6 coefficients A, B, C, D, E, F repris dans le tableau V.

8. — Coefficients de la fonction potentielle harmonique

Tableau V

A_{1g}	A =	1,54295	B_{2u}	K =	1,44865
	B =	0,31985		4L =	0,41959
	C =	8,82388		2N =	—0,25586
	D =	0,14585			
	E =	— 0,04604	B_{1g}	Q =	1,47001 (1,39284)
	F =	— 0,28388		4R =	0,57264 (0,56059)
				2S =	— 0,11790 (— 0,15959)
B_{3u}	I =	1,54820			
	H =	0,29369			
	J =	0,16814			

Rappelons la fonction potentielle étudiée par Manneback et Verleysen (cfr (²) page 355) :

$$2U = F\overline{\Delta L}^2 + f\sum^4 \Delta l_i^2 + \gamma l^2 \left(\overline{\Delta\alpha_1^2} + \overline{\Delta\alpha_2^2}\right) + \Gamma l^2 \left(\overline{\Delta\beta_1^2} + \overline{\Delta\beta_2^2}\right)$$
$$+2f'(\Delta l_1 \Delta l_2 + \Delta l_3 \Delta l_4) + 2f''(\Delta l_1 \Delta l_4 + \Delta l_2 \Delta l_3) + 2f'''(\Delta l_1 \Delta l_3 + \Delta l_2 \Delta l_4) +$$
$$2\gamma' l^2 \Delta\alpha_1 \Delta\alpha_2 + 2\Gamma' l^2 \Delta\beta_1 \Delta\beta_2 + g_1 u_1 v_1 + g_2 u_2 v_2 + g_3 u_3 v_3 + g_4 u_4 v_4$$
$$+ f_c \Delta L u_1 + \gamma_c \Delta L v_1$$

Nous trouvons pour ces coefficients les valeurs reprises dans le tableau suivant.

Tableau VI

F = 8,82388	f = 6,007315 (5,93265)	γ = 0,61354		g_1 = 2D
f_c = — 0,09207	f' = 0,169985 (0,24966)	γ' = 0,02616		g_2 = 2J
γ_c = — 0,56775	f'' = —0,024115 (0,05056)	Γ = 0,99223	(0,98018)	g_3 = 4N
	f''' = 0,018615 (—0,06106)	Γ' = 0,15305	(0,14100)	g_4 = 4S

On peut juger sur ces résultats de l'influence de l'anharmonicité, puisque pour une différence dans le mode de correction parfaitement compatible avec la précision des données expérimentales les moins bonnes (ν_5, ν_6, ν_{10}), on obtient des différences notables pour certains des paramètres de la fonction potentielle. Ainsi, on ne pourra pas attribuer de signification physique aux paramètres f'' et f''', exprimant le couplage des paramètres de valence entre les deux radicaux opposés dans la molécule. On peut aussi bien les considérer, à la précision actuelle, comme nuls, ce qui confirme l'autonomie connue de ces radicaux. Le signe positif du couplage de valence f' à l'intérieur du radical est certain, encore que la valeur absolue du paramètre soit assez mal déterminée. On reconnaît de même la grande sensibilité de paramètre de couplage f_c à l'anharmonicité; toutefois son signe négatif est certain, de même que celui de γ_c, ainsi que Manneback et Verleysen l'avaient déjà reconnu ([2]). Les quatre paramètres de couplage valence-déformation g à l'intérieur des radicaux ont une réalité physique indiscutable. (Le signe négatif des deux derniers est dû à la définition des coordonnées de déformation $\Delta\beta$).

Au moyen de la fonction potentielle du tableau V et des équations aux fréquences données plus haut, on a calculé les fréquences des sept molécules isotopiques. Pour C_2H_4 et C_2D_4, on a retrouvé les fréquences expérimentales avec une erreur n'excédant pas, et en général très inférieure à 0,1 %. Pour les autres molécules, l'erreur a été en général inférieure à 1 %, sauf dans quelques cas où elle a atteint 2 %, précisément pour les hautes fréquences sensibles à la correction d'anharmonicité (*). Une autre cause d'erreur a été l'emploi dans ce calcul de valeurs trop fortes d'environ 7 % pour les x_H et x_D, comme il a déjà été dit plus haut. Ceci ajoutait à l'erreur causée par l'incertitude de la correction d'anharmonicité.

9. — Conclusion

Nous discuterons prochainement plus en détail la signification

(*) Le calcul plus difficile des racines des deux équations du neuvième degré a été effectué de la façon suivante : on a élevé aux puissances 2 à 9 la matrice obtenue en faisant $\lambda = 0$ dans le déterminant aux fréquences. On en a déduit, par les formules de récurrence de Newton ([15]) l'équation en λ^9 écrite sous forme de polynome, dont on a calculé les racines. Ce travail a été effectué sur la calculatrice 602 A de l'I.B.M. à Bruxelles. Nous tenons à remercier ici très spécialement Mr Nalbadian qui a bien voulu effectuer pour nous ce calcul dépassant la capacité d'une machine à calculer ordinaire.

physique de la fonction potentielle qui vient d'être obtenue. Il serait assurément plus logique d'utiliser également les meilleures fréquences expérimentales des molécules isotopiques pour la détermination de la fonction potentielle, au lieu de n'en utiliser qu'une seule, comme on l'a fait. Le moyen consisterait à se servir des relations appelées « Sum rules » ([19]), faisant intervenir les paramètres potentiels, au premier degré pour les relations les plus simples. Toutefois, ce qui a été dit plus haut au sujet des difficultés introduites par l'anharmonicité montre que cette méthode est, à présent, fort délicate, si pas illusoire. En effet, certains paramètres principaux se déduisent de la différence entre les sommes des carrés des fréquences *harmoniques* de deux familles de symétrie correspondantes chez des molécules isotopiques différentes. Or, l'incertitude de la correction anharmonique se fait précisément sentir sur les fréquences élevées (3000 et 2000 cm^{-1}) et c'est la différence des carrés des sommes de fréquences qui conditionne les paramètres cherchés.

Il semble donc que ce qui s'impose actuellement, c'est avant tout un progrès dans nos connaissances expérimentales et théoriques sur l'anharmonicité des vibrations moléculaires.

REFERENCES

(1) J.M. Delfosse, *Ann. Soc. Sc.* (B) **55**, 114 (1935).
(2) C. Manneback et A. Verleysen, *Ann. Soc. Scient. Bruxelles* (B), **56**, 349 (1936), (I) **57**, 31 (1937).
(2bis) Lemaître, Manneback, Tchang, *Ann. Soc. Scient. Bruxelles* (I) **57**, 120 (1937).
(3) Y.L. Tchang, *Ann. Soc. Sc.* (Série I) **58**, 87 (1938).
(4) J. Charette et M. de Hemptinne, *Bull. Acad. Roy. de Belgique*, **37**, 436 (1951).
(5) W.S. Gallaway and E.F. Barker, *J. Chem. Phys.*, **10**, 88 (1942).
(6) G. Herzberg. Spectra of Diatomic Molecules. Second Edition (1950).
(7) G. Herzberg. Infrared and Raman Spectra of Polyatomic Molecules.
(8) R.G. Dickinson, R.T. Dillon and F. Rasetti, *Phys. Rev.*, **34**, 582 (1929).
(9) S. Bhagavantam, *Nature*, **138**, 1096 (1936).
(10) R.L. Arnett and B.L. Crawford, *J. Chem. Phys.*, **18**, 118 (1950).
(11) M. de Hemptinne et R. Van Riet, *Bull. Acad. Roy. Belg.*, **29**, 79 (1943).
(12) D.H. Rank, Shull and Axford, *J. Chem. Phys.*, **18**, 116 (1950).
(13) J.E. Lancaster, R.G. Inskeep and B.L. Crawford, *J. Chem. Phys.*, **19**, 661 (1951).
(14) G. Glockler and M.M. Renfrew, *J. Chem. Phys.*, **6**, 409 (1938).
(15) Bôcher, Introduction to higher Algebra, Chap. xviii.
(16) C. Manneback, *Ann. Soc. Sc.*, B, **55**, 237 (1935).
(17) E.B. Wilson, *J. Chem. Phys.*, **7**, 1047 (1939).
(18) Rayleigh, Theory of Sound, I, art. 88.
(19) Decius, E.B. Wilson, *Journ. Chem. Phys.*, **19**, 1409 (1951); 20, 511 (1952).

Institut de Physique de l'Université
Louvain, octobre 1952.

TABLE DES MATIÈRES

— — —

Manuscrits reçus le 31 janvier 1952

PREMIÈRE SECTION : **Sciences mathématiques et astronomiques**

PAGES

Sur la géométrie du triangle et du tétraèdre par M. V. Thébault 5

Sur une généralisation à n variables des polynômes d'Abel-Laguerre, par M. P. Delerue 13

Intégrales et calcul symbolique, par M. L. Poli 21

Extension d'un théorème de Poincaré aux systèmes d'équations récurro-différentielles de forme normale dépendant d'un paramètre variable, par M. R. H. Germay 27

Congruences formed by the Tangents to a Surface, by J. Krishna 31

Session du 30 avril 1952, à Bruxelles.

PREMIÈRE SECTION : **Sciences mathématiques et astronomiques**

A propos du tranchet d'Archimède, par M. V. Thébault 41

Un exemple simple de produit indéfini de facteurs primaires dont les zéros sont les racines d'équations récurrentes, par M. R. H. Germay 49

Note on Meijer Transform, by J. P. Jaiswal 55

Sur une propriété de similitude des configurations moyennes de mobiles indéformables, par M. E. Buckens 61

Au sujet de coefficient de glissement introduit dans l'étude de l'usure des profils actifs des dents des engrenages cylindriques à dents droites, par M. C. Demars 70

DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques**

Spectre infra-rouge à grande dispersion de CH_2 — CHD, I, par MM. C. Courtoy et M. de Hemptinne 82

Session du 30 octobre 1952, à Louvain.

PREMIÈRE SECTION : **Sciences mathématiques et astronomiques**

PAGES

Sur de plans associés à un tétraèdre, par M. V. Thébault 111

Sur les rangs-lignes à droite de deux matrices inverses, par M. R. Ballieu .. 119

Application de la méthode des fonctions majorantes à l'étude de certaines équations intégro-différentielles récurrentes, par R. H. Germay 125

On Meijer Transform. II, by J. R. Jaiswal 131

DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques et chimiques**

Sur certains systèmes pancratiques non symétriques à trois lentilles, par A. Biot 152

Construction d'un spectrographe de masse du type Mattauch à grand pouvoir de résolution, par MM. J. M. Delfosse et M. Nève de Mévergnies 156

Note sur le tracé des courbes *f* et des courbes CT en élasticité, par M. A. Pirard 162

Spectre infra-rouge à grande dispersion de CD3Br (2900 à 3400 cm–1), par M. Ch. Courtoy 173

Fonction potentielle de l'éthylène, par MM. J. Charette et Ch. Manneback 178

AUTEURS

A. Biot, 152. — F. Buckens, 61. — J. Charette, 178. — C. Courtoy, 82, 173. — P. Delerue, 13. — J. M. Delfosse, 156. — C. Demars, 70. — R. H. Germay, 29, 49, 125. — M. de Hemptinne, 82. — J. P. Jaiswal, 55, 131. — S. Krishna, 31. — Ch. Manneback, 178. — M. Nève de Mévergnies, 156. — A. Pirard, 162. — L. Poli, 21.

DATES DE PUBLICATION

1er et 2e fasc. pp. 1 à 110, 25 juin 1952.
3e fasc. pp. 111 à 196, 31 décembre 1952.

(13722) Etabl. Ceuterick, s. c., 66 rue Vital Decoster, Louvain.

Revue des Questions Scientifiques

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891); la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901); la **troisième**, 30 volumes (1902-1921); la **quatrième**, 30 vol. (1922-1936). La livraison de janvier 1937 inaugura la **cinquième série.**

La revue fut interrompue par la guerre, après la deuxième fascicule, avril 1940, du tome 117 de la collection. Ce tome fut achevé par les fascicules de février et juillet 1946.

Depuis 1947, paraît chaque année un volume, en quatre fascicules d'environ 160 pages chacun, 20 janvier, 20 avril, 20 juillet, 20 octobre.

Depuis 1947 la Revue est aussi l'organe de l'UNION CATHOLIQUE DES SCIENTIFIQUES FRANÇAIS.

Administration et Rédaction : **11, rue des Récollets, Louvain** (Belgique).

PRIX D'ABONNEMENT :

Belgique, Congo belge et Grand-Duché de Luxembourg	**200 francs belges**
abonnement de soutien	**500 francs**
abonnement d'honneur	**1000 francs**
France et colonies françaises (s'adresser à la librairie Masson, 120, boulevard St Germain, Paris 6e	**1400 francs franç.**
Autres pays (s'adresser au Secrétariat, à Louvain).....	**280 francs belges.**

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

EXTRAIT DU CATALOGUE

ANNALES DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

t. I à XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. 150,00

TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES,

t. I à XXV (1875 à 1901) . . . . . fr. 20,00
t. XXVI à XLVI (1902 à 1926) . . . . . fr. 40,00

ANNALES DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à t. LVI (1927 à 1936) fr. 70,00
Série B (sc. physiques et naturelles) » fr. 70,00
Série C (sc. médicales) (1927 et 1928) fr. 100,00 — (1929 à 1933) fr. 40,00
(1931 à 1936) fr. 20,00
Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) fr. 20,00 — (1930) fr. 60,00
(1931 à 1936) fr. 100,00
Série I (sc. mathématiques et physiques), tt. LVII à LXVI (1937 à 1952) fr. 70,00
Série II (sc. naturelles et médicales), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) fr. 70,00
Série III (sc. économiques), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) . . fr. 100,00

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES,

t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels . . . . fr. 200,00
Le fascicule trimestriel . . . . . fr. 60,00
t. XCII à CXVI (1928 à 1939). Les deux volumes annuels . . fr. 200,00
Le fascicule . . . . . fr. 40,00
t. CXVII (1940 et 1946), tt. CXVIII à CXXIII (1947 à 1952) Le volume fr. 200,00
Le fascicule . . . . . fr. 60,00

TABLES ANALYTIQUES DE LA REVUE.

t. I à L (1877 à 1901) . . . . . fr. 20,00
t. LI à LXXX (1902 à 1921) . . . . . fr. 20,00
t. LXXXI à CX (1922 à 1936) . . . . . fr. 30,00

MONOGRAPHIES DE SCIENCES NATURELLES

I. — **B. Tougarinoff.** Les réactions organiques dans l'analyse qualitative minérale (cations). — Un vol. in-8° de 107 pages (1930) : en Belgique, fr. 24,00; autres pays, 30,00 fr.

II. — **V. Schaffers.** Le paratonnerre et ses progrès récents. Un vol. in-8° de 90 pages (1931) : en Belgique, fr. 24,00; autres pays fr . 30.00.

IV. — **F. Kaisin et E. de Pierpont.** — Hydrogéologie des Calcaires de la Belgique. Un vol. in 8°- de 111 pages, avec 35 fig. et un plan hors texte (1939) : en Belgique, fr. 24,00; autres pays, fr. 30,00. (épuisé)

MONOGRAPHIES MEDICALES

I. — **M. Schillings.** Le rein en fer à cheval. Un vol. in-8° de 104 pages, avec 8 planches hors-texte (1928) : en Belgique, fr. 70,00; autres pays, fr. 90,00.

III. — **P. Van Gehuchten.** La pathologie du système pallido-strié. Un vol. in-8° de 52 pages, avec 8 planches hors-texte (1930) : en Belgique, fr. 24,00; autres pays, fr. 30,00.

MONOGRAPHIES DES SCIENCES ECONOMIQUES

I. — **A. Henry.** La structure technique de l'agriculture belge et ses particularités en Wallonie et en Flandre. Un vol. de 66 pages . . . . . fr. 20,00

II. — **A. Henry.** Les variations régionales de l'Agriculture en Belgique. Un vol. de 50 pages . . . . . fr. 10,00

III. — **A. Delpérée.** La réglementation conventionnelle des conditions de travail en Belgique. Un vol. de 200 pages . . . . . fr. 60,00

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

Nulla unquam inter fidem et rationem
vera dissensio esse potest.
CONST. DE FIDE CATH., C. IV.

TOME SOIXANTE-SEPTIÈME

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

LOUVAIN
Secrétariat de la Société Scientifique
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11
Chèques postaux 2027.46

—

1953

ANNALES
DE LA
SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
DE BRUXELLES

Série I

SCIENCES MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

LOUVAIN
Secrétariat de la Société Scientifique
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11
Chèques postaux 2027.16

1923